Andrea HOFFKAMP, Dresden

Mit fachdidaktischen Prinzipien die Komplexität von Mathematikunterricht erschließen – eine stoffdidaktische Erörterung am Beispiel des Permanenzprinzips

(Mathematik-)Unterricht bildet eine komplexe „Einheit von Erziehung, Bildung und Didaktik“ (Gruschka 2008). Dabei wirken die *fachliche*, *fachphilosophische, curriculare, pädagogische* und *didaktisch-methodische Dimension* stets gemeinsam und müssen in das rechte Verhältnis gesetzt werden. In meinem Beitrag zeige ich, wie fachdidaktische Prinzipien und damit einhergehende stoffdidaktische Analysen als Basis für die Erschließung der Komplexität dienen und eine Verbindung zwischen den Dimensionen schaffen können. Gerade in der 1. Phase der Lehrerbildung sind die Dimensionen oftmals getrennt: Das *fachliche Wissen* wird durch Mathematiker/innen gelehrt, wobei die *fachphilosophische Dimension*, die letztlich bestimmt, wie das Fach im Unterricht erscheint, zumeist nur implizit mitvermittelt wird. In den Bildungswissenschaften findet die Vermittlung der *pädagogischen Aspekte* statt. In der fachdidaktischen Ausbildung werden dann *fachdidaktisches Wissen* mit *curricularem* und *methodischem Wissen* exemplarisch verbunden. Welche Konsequenzen diese Zersplitterung hat, möchte ich mit einem einzelnen und doch typischen Unterrichtsgespräch in der Sekundarstufe II aufzeigen. Dieses Beispiel bildet zugleich den Ausgangspunkt einer stoffdidaktischen Analyse. Den Startpunkt des Unterrichtsgesprächs bildete die bekannte Ableitungsregel für Monome, sprich: Ist $f(x) = x^n$, so ist $f'(x) = nx^{n-1}$. Daraus werden nun weitere Ableitungsregeln „hergeleitet“ (Abb.1).

L: „Wie können wir das nutzen, um $f(x) = \frac{1}{x}$ abzuleiten?“
(Schweigen)
„Kann man $\frac{1}{x}$ umschreiben? Erinnern Sie sich, wie das ging?“
(Pause)

S: „Ääääh, war das nicht sowas wie x^{-1}?“

L: *(freudig)* „Ja, genau! Und was müssen wir jetzt tun?“

Schüler wagen es zögerlich, $f'(x) = -1x^{-2}$ zu bilden, schaffen es aber nicht, dies wieder als Bruch zu schreiben.

L: *(erklärend)* „Wenn wir x^{-2} als Bruch schreiben wollen, ziehen wir das runter und ändern das Vorzeichen.“

L: „Ok, jetzt versuchen wir uns mal an $f(x) = \sqrt{x}$.
Können Sie das auch umschreiben, so dass wir unsere Ableitungsregel anwenden können?“

(Nach mehreren falschen Anläufen nennt jemand die korrekte Antwort.)

L: „Ja, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Also merken Sie sich: Für $\sqrt{x}$ dürfen Sie immer $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben.“

Mein Eingriff in den Unterricht: „Warum sollten wir $x^{\frac{1}{2}}$ schreiben? Ich sage jetzt einfach mal, dass $\sqrt{x} = x^{\frac{5}{9}}$. Würden Sie mir das auch glauben?“

S: „Ja, Ihnen schon!“

Abb. 1: Unterrichtsgespräch zur „Herleitung“ von Ableitungsregeln im 11. Jg. eines Gymnasiums.

Stoffdidaktische Erörterung unter Berücksichtigung der *Dimensionen*

Aus *fachlicher Sicht* geht es in Abb. 1 einerseits um die Ableitung bestimmter weiterer Funktionenklassen (Sek II) und andererseits um Potenzen mit rationalen Exponenten (Sek I). Letzteres bildet aus *curricularer Perspektive* die Basis für den fachlichen Aufbau. Betrachtet man die Herleitung der Ableitungen der betreffenden Funktionenklassen mithilfe des Differentialquotienten (Abb. 2), so zeigt sich, dass man dabei ganz verschiedene Wege geht und dass die Tatsache, dass sich $\sqrt{x}$ als $x^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\frac{1}{x}$ als x^{-1} schreiben lassen überhaupt keine Rolle spielt.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nhx^{n-1}+h^2\cdot R-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1}+h^2\cdot R}{h}=\lim_{h\to 0}(n\cdot x^{n-1}+h\cdot R)=n\cdot x^{n-1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{(x+h)\cdot x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)\cdot x}=-\frac{1}{x^2}$$

Abb. 2: Ableitungen der in Abb. 1 angesprochenen Funktionenklassen (aus: Bigalke, Köhler 1996).

So findet man zu genau dieser Problematik schon bei Lietzmann (1916, S.401):

„Es gibt tatsächlich Lehrbücher, die die Differentiation der Potenz nur für ganze Exponenten ableiten, dann aber schreiben: ‚Bekanntlich' kann man einen Wurzelausdruck als Potenz mit gebrochenem Exponenten schreiben. Tut man das und wendet die ‚bekannte' Regel an, so erhält man … Das ist eine regelrechte Erschleichung des Ergebnisses. Der Schüler, der versuchen wollte, den bei dem Beweis der ersten Tatsache eingeschlagenen Weg wirklich noch einmal zu gehen, um ebenso die zweite Tatsache zu beweisen, muß vollkommen scheitern, weil eben für den Weg die Tatsache, daß der Exponent eine ganze Zahl ist, wesentlich ist."

Hierin kommt zugleich eine *pädagogische Grundhaltung* zum Ausdruck, die auf intellektuelle Ehrlichkeit statt Entmündigung abzielt, indem Schülerinnen und Schüler in „echten" Dialogen als Gesprächspartner ernst genommen werden: Mathematikunterricht soll als Beitrag zur Erziehung zum kritischen Vernunftgebrauch dienen und eben nicht zu „Expertengläubigkeit" führen.

Das Permanenzprinzip und die Verbindung der *Dimensionen*

Um Potenzen mit rationalen Exponenten zu definieren, beginnt man zunächst mit natürlichen Exponenten und nutzt *didaktisch-methodisch* oft sogenannte Permanenzreihen, um plausibel zu machen, dass die Festlegungen $a^0 = 1$ oder $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ sinnvoll sind. Dabei steht aus *fachlicher Sicht* die *Permanenz der Potenzgesetze* bei der Erweiterung des Zahlenbereichs für die Exponenten im Zentrum. Sodann bezeichnet man die Lösung der Gleichungen $x^2 = a$ bzw. $x^n = a$ als Wurzel $\sqrt{a}$ bzw. n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$. Der Wunsch nach *Erhaltung* der Potenzgesetze führt zur Festlegung: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$, denn $x^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$. Was hier zur Argumentation benutzt wird, ist das *Permanenzprinzip* oder die *Nützlichkeitsidee*. Es handelt sich dabei um ein *heuristisches mathematisches Prinzip*, das für konsistente begriffliche Erweiterungen innerhalb mathematischer Theorien sorgen soll. Durch die Verwendung des *didaktisch-methodischen Mittels* der Permanenzreihen bleiben die Potenzgesetze, um deren Erhalt es geht, zunächst verborgen. Mehr noch: Eine unkritische, „rein kalkülhafte" Verwendung des Prinzips kann zu Fehlern führen, z.B. könnte man die Frage nach der Existenz von Wurzeln übersehen – diese existieren i.Allg. nämlich nur für positive $a \in \mathbb{R}$. Die Erweiterung geht also auch mit einem Verlust einher. Im *curricularen Verlauf* ist erst jetzt die Frage möglich, ob sich die Permanenz der Potenzgesetze auf die Ableitung von Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^r, x > 0, r \in \mathbb{Q}$ fortsetzt und sich somit verallgemeinern lässt. Die Herleitungen in Abb. 3 basieren auf den Potenzgesetzen und benutzen die Kettenregel und die Regel von der Ableitung der Umkehrfunktion.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-n} \\
f(x) &= \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \\
f'(x) &= \underbrace{n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}} \\
f'(x) &= n \cdot x^{-n+1} \cdot (-x^{-2}) \\
f'(x) &= -n \cdot x^{-n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{n}} \\
f^{-1}(x) &= x^n,\ (f^{-1})'(x) = n \cdot x^{n-1} \\
f'(x) &= \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} \\
&= \frac{1}{(f^{-1})'(x^{\frac{1}{n}})} \\
&= \frac{1}{n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}} \\
f'(x) &= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x^r]' &= [x^{\frac{n}{m}}]' \quad (n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0) \\
&= [(x^{\frac{1}{m}})^n]' \\
&= n \cdot (x^{\frac{1}{m}})^{n-1} \cdot (x^{\frac{1}{m}})' \\
&= n \cdot x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1} \\
&= \frac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1} \\
&= r \cdot x^{r-1}
\end{aligned}$$

Abb. 3: Verallgemeinerte Potenzregel für rationale Exponenten (aus: Bigalke, Köhler 2000).

Kommen wir aber zum Problem der negativen Basen bei der Erweiterung zu rationalen Exponenten zurück. Da $(-2)^3 = -8$ ergibt, bildet -2 eine Lösung der Gleichung $x^3 = -8$, welche man doch $(-8)^{\frac{1}{3}}$ bezeichnen müsste? Warum man dies ausschließt, liegt an der Verletzung der Permanenz der Potenzgesetze, da $2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Man trifft also eine *Konvention*, mit der sich ein *bestimmtes Interesse* – die Permanenz der Potenzgesetze und die Allgemeingültigkeit der Definition von n-ten Wurzeln – verbindet. Betrachten wir nun aber die reellwertige Funktion f mit $f(x) = x^3$, so ist diese bijektiv und somit auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion bezeichnet man natürlicherweise mit $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ und schulübliche Software liefert:

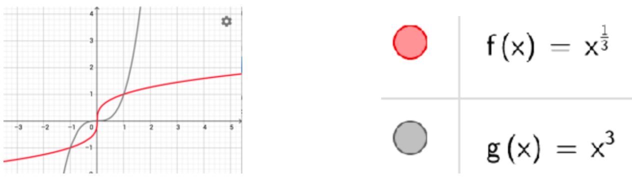

Abb. 4: Abbildung erstellt mit GeoGebra Classic 6.

Würde man also das Interesse der Existenz der Umkehrfunktion verfolgen, so wäre die Konvention eine andere, man würde auch negative Werte für x zulassen. Gleichzeitig müsste man in diesem Fall das Erweitern des Exponenten mit geraden Zahlen verbieten. Außerdem verliert man hier die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion an der Stelle x=0.

Zusammenfassende Bemerkungen

Aus *fachphilosophischer Sicht* verkörpert das Permanenzprinzip die Nützlichkeitsidee und gehört zur *Methodologie des Faches*. Als Instrument kritischen Vernunftgebrauchs legt es offen, dass *Definieren interessengeleitetes Abstrahieren von der Wirklichkeit* bedeutet und dass sich diese Interessen unter verschiedenen Bedingungen wandeln können (Hoffkamp et al. 2015). Damit verbunden ist ein *Bild von Mathematik*, das deren Zweckorientierung durch Konventionen offenbart. Ein kritischer Gebrauch des Permanenzprinzips legt die Interessen offen und expliziert, dass sich Permanenzreihen als *didaktisch-methodisches Werkzeug* auf zu erhaltende Gesetzmäßigkeiten beziehen. Auf solch einer fachlichen Basis, die wissenschaftstheoretische und erkenntnistheoretische Aspekte miteinbezieht, ist ein Unterricht möglich, der in *pädagogischer Hinsicht* die Erziehung zu kritischem Vernunftgebrauch fördert, intellektuell ehrlich gestaltet ist und die Schüler/innen in ihrem Erkenntnisinteresse ernst nimmt. Anders gesagt: Unterricht in seiner Komplexität ist ausgehend von Fachlichkeit und Fachphilosophie zu verstehen und zu erschließen und fachdidaktische Prinzipien können als verbindende Elemente dienen. Für Vorschläge für Lernumgebungen in der 1. Phase der Lehrerbildung, die eine fachliche Durchdringung in obigem Sinne fördern und eine Verbindung der Dimensionen herstellen, verweise ich auf Hoffkamp et al. (2015) und Hoffkamp & Warmuth (2015).

Literatur

Bigalke, A., Köhler, N. (1996). *Mathematik 11, Einführungsphase, Ausgabe Berlin*. Cornelsen.

Bigalke, A., Köhler, N. (2000). *Mathematik 12.2, Grundkurs, Ausgabe Berlin*. Cornelsen.

Gruschka, A. (2008). Die Bedeutung fachlicher Kompetenz für den Unterrichtsprozess – ergänzende Hinweise aus der rekonstruktionslogischen Unterrichtsforschung. *Pädagogische Korrespondenz, 38,* 44-79.

Hoffkamp, A., Schnieder, J., Paravicini, W. (2015). Denk- und Arbeitsstrategien zum Lernen von Mathematik am Übergang Schule - Hochschule. In Hoppenbrock A., Biehler R. et al., *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase – Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 295-309), Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hoffkamp, A., Warmuth, E. (2015). Dimensions of mathematics teaching and their implications for mathematics teacher education. In Krainer, K., Vondrová, N. (Eds.). *Proceedings of CERME 9* (S. 2804-2810). Prag.

Lietzmann, W. (1916). *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Bd. 2, Leipzig: Quelle & Meyer.