Max HOFFMANN, Paderborn

Schnittstellenaufgaben im Praxiseinsatz: Aufgabenbeispiel zur „Bleistiftstetigkeit“ und allgemeine Überlegungen zu möglichen Problemen beim Einsatz solcher Aufgaben

In verschiedenen Veranstaltung an der Universität Paderborn konnten Erfahrungen mit dem Einsatz von Schnittstellenaufgaben gesammelt werden (bspw. in den Veranstaltungen *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten* (Hilgert, Hoffmann, & Panse, 2015) oder *Analysis I* (Hoffmann & Biehler, 2018)). Auch wenn oft gut gedacht und gemeint, sind Schnittstellenaufgaben im Praxiseinsatz nicht automatisch erfolgreich. Nachfolgend wird eine Aufgabe zum Thema „Bleistiftstetigkeit“ im Detail vorgestellt und anschließend ein Modell vorgeschlagen, mit dessen Hilfe Probleme beim Einsatz von Schnittstellenaufgaben lokalisiert und reflektiert werden können.

Theoretische Grundlagen

Schnittstellenaufgaben werden als Ansatz zur Überwindung der doppelten Diskontinuität beispielsweise von Bauer (2013) beschrieben. Ziel ist es Beziehungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik sichtbar zu machen und beide als „füreinander nützlich und aufeinander bezogen“ (Bauer, 2013, S.41) wahrnehmbar zu machen. Er schlägt vier (nicht disjunkte) Kategorien von Schnittstellenaufgaben vor, die Teilaspekte der Bezüge explizieren: *A. Grundvorstellungen aufbauen und festigen, B. Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren, C. Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen* und *D. Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren* (Bauer, 2013, S. 41 ff.).

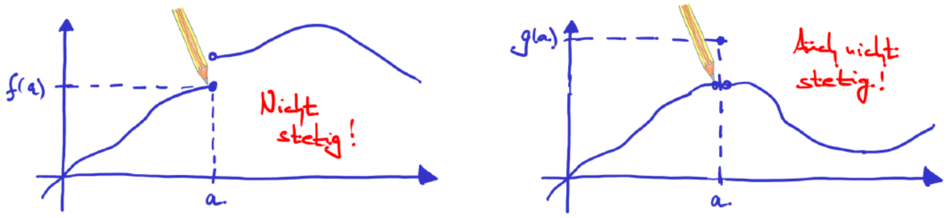
Um für die Profession relevante Schnittstellenaufgaben erstellen zu können, bietet eine empirische Analyse mathematikbezogener Handlungsanforderungen an Lehrkräfte, wie sie bei Prediger (2013, S. 156) dargestellt wird einen sinnvollen Referenzrahmen. Die Relevanz von Schnittstellenaufgaben für den späteren Lehrerberuf kann durch einen Abgleich mit der Liste von Handlungsanforderungen legitimiert werden.

Aufgabe *Bleistiftstetigkeit* – Aufgabenstellung

Die folgende Schnittstellenaufgabe wurde im Rahmen der *Analysis I* im Wintersemester 2016/17 als Hausaufgabe eingesetzt. Eine ähnliche Aufgabe nennt auch Prediger (2013, S. 160) als Beispiel für authentische Lernanlässe.

Eine oft anzutreffende intuitive Vorstellung zur Stetigkeit einer Funktion (insbesondere im Bereich der Schule) ist die folgende:

> Eine Funktion ist stetig, wenn man den Graphen der Funktion, ohne abzusetzen, mit einem Bleistift durchzeichnen kann.
>
> **Beispiel.** Beim Zeichnen folgender Funktionsgraphen muss man den Bleistift an der Stelle a absetzen.



Wir bezeichnen Funktionen mit dieser Eigenschaft als *bleistiftstetig*.

Betrachten Sie die folgenden Funktionen und bearbeiten Sie a) und b).

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0], \\ 1, & x \in (0,1], \end{cases} \qquad g : [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-1,0), \\ 1, & x \in (0,1], \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) An welchen Stellen sind die Funktionen jeweils stetig bzw. unstetig. Beweisen Sie Ihre Antworten.

b) Versuchen Sie, eine formale Definition (oder auch mehrere) für die oben beschriebene Bleistiftstetigkeit anzugeben. Diskutieren Sie, ob diese äquivalent zur normale Stetigkeit ist bzw. sind. Dabei kann es hilfreich sein, potentielle Definitionen für die Bleistiftstetigkeit auf die einzelnen Beispiele anzuwenden und sich die daraus resultierenden Konsequenzen zu überlegen. Setzen Sie sich insbesondere mit den Formulierungen „ohne abzusetzen“ und „mit einem Bleistift (durch)zeichnen“ kritisch auseinander.

Aufgabe *Bleistiftstetigkeit* – Potenzial

Im Folgenden werden Überlegungen beschrieben, die durch die Aufgabe idealerweise induziert werden können: Grundsätzlich ist Bleistiftstetigkeit nur für Funktionen $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sinnvoll. Die Vorstellung des Durchzeichnens stößt bereits bei der Funktion g an ihre Grenzen. Es scheint sinnvoll nur Funktionen mit zusammenhängendem Definitionsbereich betrachten. Dies ist auch im Schulkontext relevant, da auch dort mit $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-1}$ eine entsprechende Funktion betrachtet wird. Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Frage des „Zeichnens des ganzen Graphs“. Dies ist sowohl bei einem unbeschränkten Definitionsbereich, als auch bei Polstellen mit senkrechten Asymptoten in endlicher Zeit nicht möglich. Eine Lösung hierfür bietet eine Umformulierung zu „auf jedem abgeschlossenen Teilintervall des Definitionsbereichs durchzeichenbar“. Die beiden Funktionen h und j haben einen zusammenhängenden Definitionsbereich, aber es tritt ein anderes Problem auf, bei dem man auf zwei Arten argumentieren kann: Geht man von einem *realen Stift* aus, kann man beide Funktionen zeichnen ohne abzusetzen, denn die Oszillation der Funktionen verschwinden in einer Umgebung von 0 hinter der Strichdicke; beide Funktionen sind dann bleistiftstetig. Geht man von einem *idealen (beliebig dünnen) Stift* aus sind beide Funktionen nicht bleistiftstetig, da der Funktionsgraph auf jedem (kompakten) Intervall um 0 „unendlich lang" ist, man also mit dem Zeichnen nicht fertig werden würde. Zum Beweis schätzt man die Terme durch die harmonische Reihe ab. Je nach Sichtweise sind also entweder beide Funktionen bleistiftstetig oder nicht. In der Tat ist aber nur j stetig. Es wird deutlich, dass man bei Funktionen mit divergenter Bogenlänge mit dem Begriff der Bleistiftstetigkeit nicht weiter kommt. Auch die Einschränkung auf konvergente Bogenlängen würde zu neuen Problemen führen. Die Bogenlänge (um 0) von $x \mapsto x^2 \sin(x^{-1})$ konvergiert (Abschätzung mit $\sum k^{-2}$), hat aber unendlich viele Extrempunkte, die zu zeichnen wären. Bleistiftstetigkeit scheint also nur für Funktionen mit den oben beschriebenen Anforderungen an den Definitionsbereich und mit nur endlich vielen „besonderen Punkten" sinnvoll definierbar zu sein. In diesem Fall kann sie dann durch die Übereinstimmung von rechts- und linksseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert an jeder Stelle des Definitionsbereiches formalisiert werden. Doch auch die genannte Einschränkung führt zu Problemen, da die (relevante) Funktion $\sin(x)$ die Bedingungen ebenfalls nicht erfüllt.

Aufgabe *Bleistiftstetigkeit* – Einordnung

Die Aufgabe lässt sich in die Kategorien von Bauer (2013) einordnen: Die in der Aufgabe adressierte *Darstellbarkeit* ist eine Grundvorstellung zur Stetigkeit (Greefrath et al., 2016, S. 141). Diese wird dem formalen Zugang der Hochschulmathematik gegenübergestellt. (A,B,C). In b) wird mit dem Definieren eine typische mathematische Arbeitsweise geübt und reflektiert (D). Weiter lassen sich folgende Bezüge zu den Berufsanforderungen von Prediger (2013, S. 156) sehen: „Zugänge […] analysieren und bewerten", „geeignete Darstellungen und Exaktheitsstufen auswählen und nutzen […]". Die Aufgabe kann also durchaus als Schnittstellenaufgabe verstanden werden.

Aufgabe *Bleistiftstetigkeit* – Reflexion

Es stellt sich die Frage, wie man das Potenzial der Aufgabe mit einer Aufgabenstellung aktiviert. Die Erfahrungen beim Einsatz als Hausaufgabe zeigen, dass dies in der Praxis eher nicht gelingt. Die Rückmeldungen und Berichte der Korrektoren unterstützten folgende potenzielle Problempunkte: Der Stetigkeitsbegriff wurde auf Universitätsniveau noch nicht in der notwendigen

Tiefe durchdrungen. Die Studierenden konnten zu Hause (ohne tutorielle Hilfe) nur einige wenige der oben vorgestellten Aspekte ansprechen. In der Wahrnehmung mancher hat das Thema Stetigkeit in der Schule keine Relevanz. Die Aufgabenstellung war zu lang und dahingehend irreführend, dass sie impliziert, dass es eine „korrekte“ Definition gibt. Insbesondere fehlten Leitfragen, die den Lösungsprozess strukturieren. Bei einem erneuten Einsatz der Aufgabe bietet es sich an, sie in einer Präsenzübung einzusetzen, in der ein Tutor den Prozess anleiten kann.

Einflussgrößen für den Einsatz von Schnittstellenaufgaben

Beim Einsatz der Aufgabe *Bleistiftstetigkeit* ist deutlich geworden, dass auch eine Schnittstellenaufgabe mit hohem Potenzial kein Selbstläufer ist. Aus der Reflexion können folgende Einflussgrößen abstrahiert werden, die bei der Lokalisierung und Einordnung von Problemen hilfreich waren.

- (I) *Fachmathematischer Hintergrund* (ideal bezogen auf die Lernziele vs. realer Leistungsstand der Studierenden)
- (II) *Schnittstellengedanken in der Aufgabenlösung* (Denkmöglich vs. Unter den gegeben Lernbedingungen von den Studierenden erwartbar)
- (III) *Relevanz* des Themas für die Schule (tatsächlich vs. aus der Sicht der einzelnen Studierenden)
- (IV) *Allgemeine Aufgabenmerkmale* (Sprache, …)

Als nächstes müssen weitere reale Einsatzszenarien von Schnittstellenaufgaben evaluiert werden und es muss geprüft werden, ob die Einflussgrößen als Gerüst zur Erklärung positiver sowie negativer Evaluationen geeignet sind.

Literatur

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: tutoriell und transparent*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Hoffmann, M., & Biehler, R. (2018). Schnittstellenaufgaben für die Analysis I – Konzept, Beispiele und Evaluationsergebnisse. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *BzMU 2017* (S. 441–444). Münster: WTM-Verlag.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151–168). Wiesbaden: Springer Spektrum.