Rita HOFMANN & Jürgen ROTH, Landau

Von der Situation zum Graph und umgekehrt – Hindernisse und Schülervorstellungen

Theoretischer Hintergrund

Kennzeichnend für funktionales Denken sind die Verwendung verschiedener Repräsentationen für Funktionen (Tabelle, Graph, algebraische Darstellung, verbale Beschreibung) sowie die Fähigkeit zum zieladäquaten Wechsel zwischen diesen Repräsentationen. Hierbei sollen vor allem solche Darstellungswechsel schwierig sein, bei denen gedanklich zwischen Alltagssituationen und mathematischer Perspektive gewechselt werden muss (Bossé et al., 2011). *Ein* solcher Repräsentationswechsel ist bei der Konstruktion bzw. bei der Interpretation von Funktionsgraphen im Hinblick auf eine konkrete Situation zu bewältigen. Dieser Wechsel wird häufig von Fehlern und Fehlvorstellungen begleitet, wie etwa dem Graph-als-Bild-Fehler (GaBF), der Bestand-Änderungs-Verwechslung, oder der falschen Vorstellungen zum grundsätzlichen Aussehen von Funktionsgraphen. Diese und weitere Fehler wurden bereits an verschiedenen Stellen ausführlich diskutiert (vgl. z.B. Nitsch, 2015; Leinhardt et al., 1990; McDermott et al., 1987; Clement, 1985). Für Mathematiklehrkräfte ist es von großer Bedeutung, diese Schülerfehler zu erkennen, um der Verfestigung von Fehlvorstellungen entgegenzuwirken. Zudem kann aus den eigenen Fehlern gelernt und das Verständnis von Funktionen durch die Abgrenzung von Fehlvorstellungen vertieft und verbessert werden. Die Diagnose solcher Fehlvorstellungen ist allerdings nicht immer einfach, weswegen es sinnvoll erscheint, solche diagnostischen Kompetenzen bereits im Lehramtsstudium zu fördern.

Forschungsfragen

Im Rahmen des Forschungsprojektes, dessen Zielsetzung die Förderung der diagnostischen Kompetenz von Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik darstellt, wird folgende Frage untersucht:

Wie werden die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu funktionalen Zusammenhängen von angehenden Mathematiklehrkräften wahrgenommen?

Zur Beantwortung dieser Frage wurden Videos von Schülergruppen aufgezeichnet, die sich in Gruppen mit Arbeitsaufträgen zu Funktionsgraphen auseinandersetzen. Im Rahmen der Generierung ergab sich eine weitere Frage:

Zeigen sich Unterschiede zwischen den Klassenstufen 7 und 8 bezüglich der Schwierigkeiten beim betrachteten Darstellungswechsel?

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Methode

Die Untersuchung der Unterschiede zwischen den Klassenstufen 7 und 8 fand im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Koblenz-Landau statt. Hieran nahmen insgesamt 66 Gymnasiast/inn/en teil, darunter 26 Schüler/innen der Klassenstufe 7 und 40 Schüler/innen der Klassenstufe 8. Innerhalb von zwei Schulstunden bearbeiteten die Lernenden in Gruppenarbeit Aufgaben, die jeweils einen Darstellungswechsel von der Situation zum Graph oder umgekehrt beinhalteten.

Die Interventionsstudie mit den Lehramtsstudierenden fand im Rahmen der Bachelorvorlesung „Fachdidaktische Grundlagen“ statt, an der Erst- und Zweitsemesterstudierende teilnahmen, die das Fach Mathematik für Grund-, Förder-, Realschulen plus sowie für Gymnasien studierten. Insgesamt nahmen 223 Studierende (Alter: M = 20,71 Jahre, SD = 2,06; Lehramt: 55% Grundschule, 33% Förderschule, 12% Realschule plus & Gymnasium) teil.

Vor der Intervention erfolgte eine fachdidaktische Einführung in das Thema *Funktionales Denken*. In diesem Rahmen wurden auch die zentralen Schülerschwierigkeiten und Fehler vorgestellt. Daraufhin wurden in einem Vortest die diagnostischen Fähigkeiten der Lehramtsstudierenden ermittelt. Hierzu sollten vier Schüler (in diesem Video waren es vier Jungen) in einem Video beobachtet werden, die einen qualitativen Funktionsgraphen konstruieren sollten. Neben dem Video, welches nur einmal angeschaut werden konnte, standen auch die Aufgabe, die bearbeitet wurde, sowie die Notizen und Lösung der Schüler zur Analyse zur Verfügung. Die Diagnoseaufträge bezogen sich sowohl auf die zu erkennenden Stärken, als auch auf die Schwächen der vier Schüler. In der sich anschließenden Intervention hatten die Studierenden die Möglichkeit vier bis acht weitere Fälle zu bearbeiten. Abschließend erfolgte ein Nachtest, welcher identisch zum Vortest war. Als Richtlinie für die Güte der Studierendenantworten wurde ein Expertenrating mit Mathematikdidaktiker/inne/n und Lehrer/inne/n herangezogen.

Ergebnisse

Die Analyse der Schülerantworten ergibt, dass keiner der 7.- und 8.-Klässler/innen in der Lage war, eine Treppenfunktion zu zeichnen. Zudem scheuten sich fast 80% der Lernenden davor, konstante Graphenabschnitte zu zeichnen. Bei letzterem zeigt sich allerdings eine Verbesserung von der 7. zur 8. Klasse. Während fast 90% der 7.-Klässler/innen keine konstanten Graphenabschnitte zeichneten, waren es in der 8. Klasse etwas weniger als 70%. Weiterhin zeigt sich, dass die Eindeutigkeit von Funktionen von vielen Lernenden beider Klassenstufen nicht beachtet wurde. 77% der jüngeren Lernenden begingen diesen Fehler, aber auch noch 60% der älteren, die bereits mehr Erfahrung mit Funktionen hatten. Größere Unterschiede zwischen den Klassenstufen zeigen sich beim GaBF mit 88% (7. Klasse) zu 43% (8. Klasse) sowie bei der Betrachtung eines falschen Graphen - wenn mehrere Graphen nebeneinander gegeben waren - von 77% (7. Klasse) zu 28% (8. Klasse). Gegenläufig, das heißt mit einem häufigeren Auftreten in der 8. Klasse, ist die Annahme, dass der Graph im Ursprung beginnen müsse. Hier sind es 20% der 8.-Klässler/innen und nur 5% der 7.-Klässler/innen.

Betrachtet man nun die Beobachtungen der Studierenden bezogen auf das Video der Testsituation, so fällt auf, dass nur jeweils 3% der Studierenden in Vor- und Nachtest die Verletzung der Eindeutigkeit wahrgenommen haben. Die Verletzung physikalischer Aspekte und der nicht richtig gezeichnete Hochpunkt im Looping wurden nahezu von keinem der Studierenden genannt. Eine allgemeine Nennung, dass es Probleme mit dem Looping gab, wurde dagegen von etwa 60% der Probanden im Vortest erkannt; 38% geben konkreter an, dass der GaBF auftritt. Hin zum Nachtest gibt es eine Verschiebung: 50% nennen plakativ, dass es Probleme mit dem Looping gab, knapp 60% gehen dagegen konkret auf den GaBF ein. Eine weitere Verbesserung zeigt sich darin, dass mit 47% im Nachtest, mehr Studierenden wahrgenommen haben, dass in der Schülergruppe Unstimmigkeiten bezüglich des Beginns des Graphen aufgetreten sind. Im Vortest waren dies nur 33% der Studierenden. Allerdings zeigten sich auch geringfügige Rückgänge, wie beim Erkennen, dass den Schüler/inne/n nicht alle Begriffe bekannt sind. Dies erkannten im Vortest 13% im Nachtest nur 9% der Studierenden.

Diskussion

Eine Ursache für die Vermeidung konstanter Graphenabschnitte, kann die fehlende Vertrautheit mit solchen Funktionstypen sein. Auch wenn die Definition einer Funktion bekannt ist, haben die Schüler/innen solche Funktionsarten vielleicht noch nie gesehen, weswegen diese nicht als solche wahrgenommen werden (vgl. Problem *concept image vs. concept definition*, Tall & Vinner, 1981). Die häufige Verletzung der Eindeutigkeit könnte mit dem seltenen Erkennen desselben bei den Lehramtsstudierenden zusammenhängen. Nimmt die Lehrperson die Eindeutigkeit von Funktionen selten in den Blick oder wird diese kaum thematisiert, so wird sich auch keine Verbesserung bei den Schüler/inne/n einstellen. Folglich ist es wichtig, Lehramtsstudierende dafür zu sensibilisieren, auf diese Eigenschaft von Funktionen zu achten. Der Rückgang bei der Betrachtung eines falschen Graphen, sowie des GaBFs kann auf eine größere Vertrautheit mit Funktionsgraphen zurückzuführen sein. Ersteres könnte damit verbunden sein, dass mit einer größeren Vertrautheit auch eine kognitive Entlastung einhergeht und die gewonnenen

Kapazitäten genutzt werden können, sich auf weitere Dinge, wie das auseinanderhalten der Graphen, zu konzentrieren. Der Rückgang des GaBFs könnte darauf zurückzuführen sein, dass den Schüler/inne/n bereits mehr Funktionsgraphen begegnet sind und sie bereits wissen, dass diese meist nicht aussehen, wie die dahinterliegende Realsituation. Obwohl der GaBF potenziell nur von solchen Aufgaben initiiert wird, bei denen die Situation visuell fassbar ist, hängt er doch auch von den Schülervorstellungen ab. Dies kann daran gesehen werden, dass der GaBF bei Verwendung derselben Aufgaben seltener bei den 8.-Klässler/inne/n aufgetreten ist, welche bereits mehr Erfahrungen mit Funktionsgraphen haben. Zusätzliche Vorstellungen können aber andere Fehler hervorrufen. So werden in der 8. Klasse lineare und proportionale Funktionen behandelt, was den Zuwachs in der Annahme, dass alle Graphen im Ursprung beginnen müssten, erklären könnte.

Die Untersuchung der Wahrnehmung der Studierenden zeigt, dass der GaBF mit Hilfe des Trainings deutlich besser erkannt wurde, als zuvor. Dies kann dazu beitragen, dass die angehenden Lehrkräfte diesen Fehler auch später eher wahrnehmen und darauf reagieren können. Die Untersuchung zeigt zudem, dass bestimmte Aspekte, wie die physikalischen Gegebenheiten nicht beachtet wurden. An dieser Stelle gilt es, den Blick der Studierenden auch für solche Zusammenhänge zu sensibilisieren, denn funktionale Zusammenhänge treten in allen Fächern auf. Auch wenn sich nicht in allen Punkten eine Verbesserung zeigte, ist aber zu sehen, dass die Schwierigkeiten konkreter benannt werden, welche im Vortest noch sehr allgemein formuliert wurden.

Literatur

Bossé, M.; Adu Gyamfi, K.;Cheetham, M. (2011): Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. In: *International Electronic Journal of Mathematics Education* 6 (3), S. 113–133.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (S. 369–375). Utrecht.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* 60 (1), 1–64.

McDermott, L. C.; Rosenquist, M. L.; van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics* 55 (6), 503–513.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (2), 151–169