Lars HOLZÄPFEL, Anika DREHER & Petra GRETSCH, Freiburg

Unterstützen Visualisierungen konzeptuelles Wissen zentraler mathematischer Konzepte der Sekundarstufe I bei Oberstufenschüler/innen?

Das Nutzen von Visualisierungen gilt als vielversprechender Ansatz, um den Aufbau konzeptuellen Wissens zu mathematischen Konzepten zu fördern (Atagi, DeWolf, Stigler & Johnson, 2016). Folglich werden zentrale mathematische Konzepte der Sekundarstufe I, wie beispielsweise Bruchoperationen, häufig mit Hilfe von Visualisierungen eingeführt, wobei ein Fokus auf der Vernetzung zwischen Visualisierung und symbolischer Darstellung liegt. Beobachtungen zeigen jedoch, dass Lernende nach dem Wechsel auf die symbolische Ebene kaum noch Visualisierungen nutzen. Es ist folglich fraglich, inwiefern auf diese Weise nachhaltig konzeptuelles Wissen gefördert wird. Mit Hilfe einer Paper-Pencil-Testung von 136 Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe in drei Bedingungen untersucht die vorgestellte Studie daher, inwieweit Lernende der Sekundarstufe II noch über konzeptuelles Wissen zu zentralen Konzepten der Sekundarstufe I verfügen und ob Visualisierungsprompts dazu beitragen können, solches konzeptuelles Wissen zu (re)aktivieren.

1. Theorie

Selbst in der Oberstufe haben Schülerinnen und Schüler anhaltende Schwierigkeiten mit grundlegenden mathematischen Konzepten wie beispielsweise der Bruchrechnung (Charalamous & Pitta-Pantazi, 2007). Diese Schwierigkeiten resultieren mitunter daraus, dass träges Wissen erworben wurde, welches in der Regel eher oberflächlich memoriert als tiefer verarbeitet und vernetzt wird (Gruber, Mandl & Renkl, 2000). Schülerinnen und Schüler verwechseln dann Regeln und können nicht auf die zugrundeliegenden Konzepte zurückgreifen. Daher liegt ein Augenmerk stets auch auf den verschiedenen Wissensfacetten des prozeduralen und konzeptuellen Wissens (Rittle Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Atagi, DeWolf, Stigler und Johnson (2016) zufolge können Visualisierungen den Aufbau konzeptuellen Wissens unterstützen und damit einher geht die Idee eines nachhaltigen Wissensaufbaus. Visualisierungen unterstützen zudem das Erkennen von Strukturen, das Verstehen von Konzepten und helfen bei der Lösung von Problemen und beim Begründen von Zusammenhängen (Arcavi, 2003). Diese Funktionen von Visualisierungen leisten einen Beitrag zur tieferen – und damit nachhaltigeren – Verarbeitung des Wissens. Visualisierungen wirken jedoch nicht per se unterstützend, sondern können auch Lernhürden sein (vgl. Empson et. al., 2011), wenn sie z.B. nicht verstanden werden oder die Passung zwischen

Inhalt und bildlicher Darstellung nicht gegeben ist. Zu unterscheiden ist außerdem, ob die Schülerinnen und Schüler die Visualisierungen selbst produzieren oder vorgegebene Visualisierungen nutzen sollen. Die hier vorgestellte Untersuchung unterscheidet entsprechend zwischen Produktion und Rezeption.

2. Forschungsfragen

- Inwiefern können Lernende der Sek. II grundlegende mathematische Konzepte der Sek. I erklären?
- Inwiefern zeigen Lernende der Sek. II konzeptuelles Wissen zu grundlegenden mathematischen Konzepten der Sek. I?
- Können Visualisierungsprompts dazu beitragen, konzeptuelles Wissen über grundlegende mathematische Konzepte der Sek. I zu (re)aktivieren?

3. Methode

Für die Erhebung wurden 136 Schülerinnen und Schüler aus fünf Parallelklassen der 11. Jahrgangsstufe in einem Fragebogen gebeten, die Themen Bruchaddition, Distributivgesetz, Äquivalenzumformung und Prozentrechnung zu erklären. Eingeteilt wurde zufällig nach folgenden Bedingungen:

- Kontrollgruppe: keine Visualisierung
- Experimentalgruppe 1: Produktion einer eigenen Visualisierung
- Experimentalgruppe 2: Rezeption einer gegebenen Visualisierung

Konkret wurden die Items wie folgt formuliert:

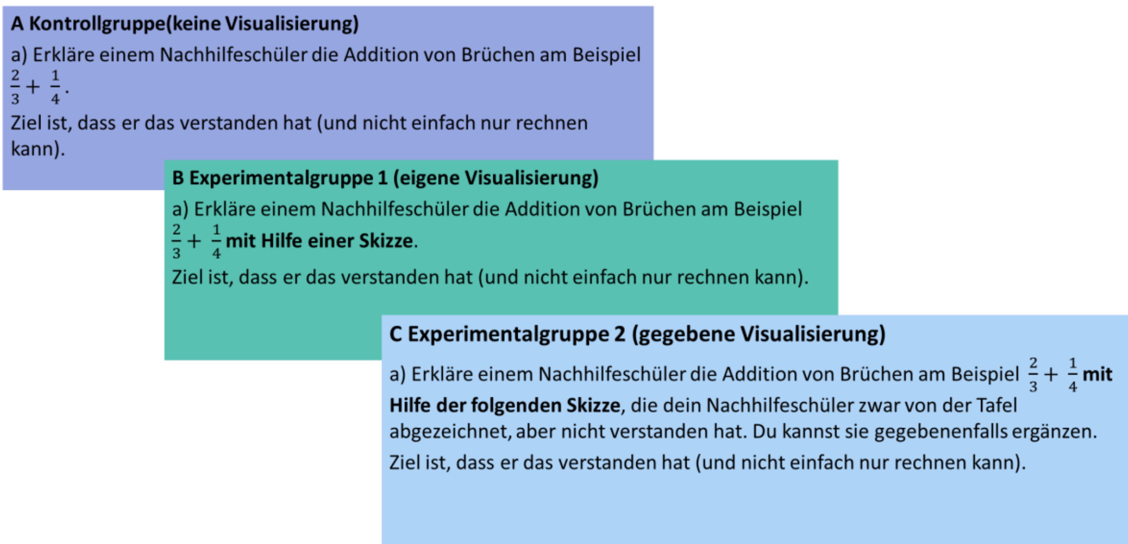

Abb. 1: Beispielitems der Aufgabe zur Bruchaddition in den drei Bedingungen.

Die Auswertung der Antworten erfolgte mittels einer Top-down Codierung mit den Kategorien „Visualisierung gezeichnet bzw. ergänzt" (Cohen's kappa >.86); „Art der Erklärung (prozedural / konzeptuell)" (Cohen's kappa >.78) und „Korrektheit" (Cohen's kappa >.87).

4. Ergebnisse

Die Ergebnisse in Bezug auf das Beispielitem in Abbildung 1 zeigen Gruppenunterschiede zugunsten derjenigen, die aufgefordert wurden, eine Visualisierung zu zeichnen bzw. die vorgegebene Visualisierung für die Erklärung zu nutzen.

	Version A (keine Visualisierung)	*Version B (eigene Visualisierung)*	*Version C (gegebene Visualisierung)*
Visualisierung gezeichnet	4%	25%	---
Art der Erklärung 0 = prozedural 1 = teilweise konzeptuell 2 = konzeptuell	 Code 0: 91% Code 1: 2% Code 2: 7%	 Code 0: 81% Code 1: 15% Code 2: 5%	 Code 0: 50% Code 1: 35% Code 2: 15%
Korrektheit	44%	71%	53%

Für die Berechnung des Haupteffekts hinsichtlich der Art der Erklärung wurde als robuster Test für inhomogene Varianzen der Welchs F-Test gewählt: $F(2, 84) = 6{,}71$, $p=.002$. Geplante Kontraste ergaben einen signifikanten Unterschied zwischen Kontrollgruppe und Experimentalgruppen ($t(94) = 2{,}61$, $p = .010$, $d = 0{,}54$) sowie zwischen den beiden Experimentalgruppen ($t\ (82) = 2{,}97$, $p = .004$, $d = 0{,}66$). Ebenso wurde eine ANOVA bezüglich Kategorie „Korrektheit" berechnet: $F(2, 85) = 3{,}32$, $p = .041$. Geplante Kontraste zeigten in diesem Fall einen signifikanten Unterschied zwischen Kontrollgruppe und Experimentalgruppen ($t(80) = 1.93$, $p = .05$, $d = 0{,}43$), aber nicht zwischen den beiden Experimentalgruppen.

5. Diskussion

Auffallend ist, dass die beiden Experimentalgruppen in Bezug auf das Konzept der Bruchaddition in den Kategorien Korrektheit und Art des Wissens besser abschneiden. In beiden Fällen wurden Prompts zur Produktion bzw. Nutzung von Visualisierungen gegeben. Es ist naheliegend zu vermuten, dass diese Aufforderung vertiefte kognitive Prozesse ausgelöst hat, um eher konzeptionell und schließlich auch korrekter erklären zu können. Ein gleiches Vorgehen in der Auswertung erfolgte auch bei den anderen getesteten

Konzepten. Beim Prozentrechnen zeigten sich schwächere Unterschiede, während beim Distributivgesetz keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen erkennbar waren. Diese unterschiedlichen Ergebnisse je nach Themengebiet sind wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass Visualisierungen zu den Konzepten bei ihrer Einführung im Unterricht unterschiedlich stark zum Einsatz kommen und dementsprechend nicht gleichermaßen bekannt sind. Diese Befundlage legt den Schluss nahe, dass entsprechende Forschungsergebnisse keinesfalls ohne weiteres über bestimmte Inhalte hinaus generalisiert werden können.

6. Literatur

Arcavi, A. (2003): The role of visual representations in the learning of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics 52 (3)*, S. 215–241.

Atagi, N., DeWolf, M., Stigler, J. W. & Johnson, S. P. (2016). The role of visual representations in college students' understanding of mathematical notation. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 22(3)*, 295.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics, 64(3)*, 293.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In J. Cai & E. Knuth (Hrsg.), *Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives.* (S. 409–428). Berlin, Heidelberg: Springer.

Gruber, H., Mandl, H. & Renkl, A. (2000). Was lernen wir in Schule und Hochschule: Träges Wissen? In H. Mandl & J. Gerstenmaier (Hrsg.), *Die Kluft zwischen Wissen und Handeln.* (S. 139-156). Göttingen: Hogrefe.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology, 93(2)*, 346.