Martin Erik HORN, Berlin

Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation mit und ohne GAALOP

Einfach erscheint meist, was bereits eingeübt ist. Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation wird deshalb entscheidend davon abhängen, welche Vorkenntnisse die jeweilige Zielgruppe mitbringt.

Die Geometrie von Lorentz-Transformationen

In einer Welt ohne Algebra wird die Darstellung einer Lorentz-Transformation geometrisch erfolgen. Wie hätten Einstein und Minkowski die Lorentz-Transformation zum Beispiel zu Zeiten der Spät-Babylonier darstellen und diskutieren können? Eine einfache Antwort liefern simple Reflexionen.

Ein raumzeitliches Koordinatensystem mit zeitlicher ct-Achse und räumlicher x-Achse kann in einem ersten Schritt in ein zweites, hier gestrichenes raumzeitliches Koordinatensystem mit ct'-Achse und x'-Achse (siehe Abb. 1 links) überführt werden, indem eine Spiegelung an der zeitlichen Winkelhalbierenden zwischen ct- und ct'-Achse erfolgt.

Das Ergebnis dieser ersten Reflexion führt zwar zur korrekten Ausrichtung der ct-Achse, die nun in die ursprüngliche Richtung der ct'-Achse zeigt (siehe Abb. 1 Mitte). Jedoch hat sich die Händigkeit des Koordinatensystems geändert: Die x-Achse weist der erwarteten Richtung entgegen.

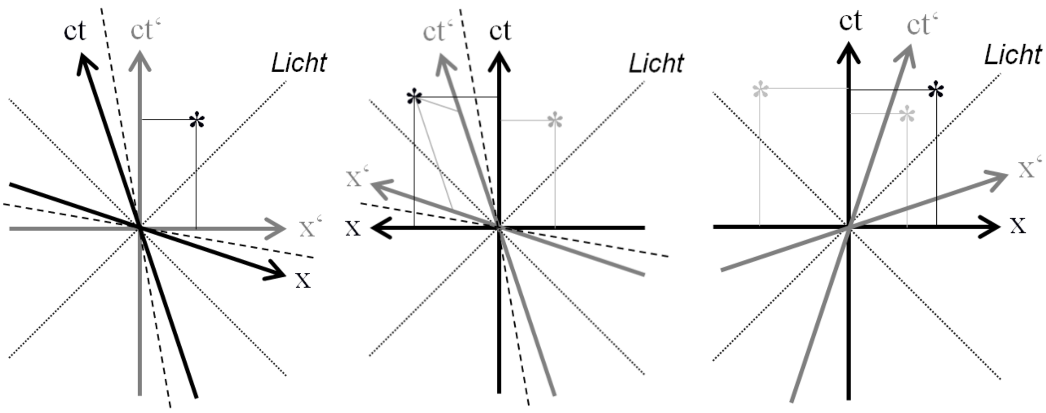

Abb. 1: Die Lorentz-Transformation als Hintereinanderfolge zweier raumzeitlicher Reflexionen.

Dies kann korrigiert werden, indem eine zweite Reflexion an der links gestrichenen ct'-Achse, die naturgemäß senkrecht zur neuen x-Achse (Abb. 1 Mitte) steht, die Orientierung dieser räumlichen Achse umkehrt. Die nun ablesbaren Koordinaten eines Ereignisses (gekennzeichnet als Stern in Abb. 1) des nun rechts ungestrichenen Inertialsystems sind die Lorentz-transformierten Werte des ursprünglichen, gestrichenen Inertialsystems.

Bei dieser Zerlegung der Lorentz-Transformation als raumzeitliche Rotation in zwei aufeinander folgende raumzeitliche Reflexionen können alle Schritte zeichnerisch einfach vollzogen und so jede Lorentz-Transformation gänzlich ohne algebraische Rechnungen durchgeführt werden.

Sandwich-Produkte

In der Geometrischen Algebra werden Reflexionen durch Sandwich-Produkte beschrieben. Eine geometrische Größe (also beispielsweise der Ort und Zeitpunkt eines Ereignisses beschreibende Vektor $\mathbf{r}$) wird an einer zweiten geometrischen Größe (also beispielsweise an einer Achse, die in Richtung eines zeitartigen Einheitsvektors $\mathbf{n}$ mit $\mathbf{n}^2 = 1$ weist) reflektiert, indem die zu reflektierende Größe in sandwichartiger Weise von rechts und links mit der reflektierenden Größe multipliziert wird (Horn 2015a, b).

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \frac{\mathbf{m\,r\,m}}{\mathbf{m}^2} \qquad \text{mit } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m}^2}} \tag{1}$$

Wird die Reflexionsachse nicht durch einen zeitartigen Einheitsvektor repräsentiert, muss – wie in Gleichung (1) rechts – ergänzend durch das Quadrat des die Achse repräsentierenden Vektors dividiert werden. Nach dieser Normierung sind die beiden Formeln von Gl. (1) äquivalent.

Damit kann eine äußerst einfache Darstellung der Lorentz-Transformationen gefunden werden: Eine erste Reflexion an der zeitlichen Winkelhalbierenden, die durch den zeitartigen Einheitsvektor $\mathbf{n}_1$ repräsentiert wird, wird gefolgt von einer zweiten Reflexion an der ursprünglichen, gestrichenen Zeitachse, repräsentiert durch $\mathbf{n}_2$, was auf das doppelte Sandwichprodukt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Lorentz}} = \mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2 \tag{2}$$

führt. Doran und Lasenby (2003, S. 43) kommentieren diesen Zusammenhang als: „This is starting to look extremely simple!“ In der Tat werden hier Lorentz-Transformationen mathematisch äußerst elegant durch schlichte Multiplikationen – ganz ohne Rotationsmatrizen – ausgedrückt.

Einfach erscheint, was bereits eingeübt ist

Für Lernende, die den Umgang mit hyperbolischen Funktionen bereits eingeübt und kognitiv durchdrungen haben, ist die Darstellung des Einheitsvektors der zeitlichen Winkelhalbierenden im Folgenden (Gl. 3 links) als

$$\mathbf{n}_1 = \cosh(\alpha/2)\,\gamma_t' - \sinh(\alpha/2)\,\gamma_x' \qquad \mathbf{m}_1 = \gamma_t + \gamma_t' \tag{3}$$

kein Problem. Da im schulischen Bereich jedoch hyperbolische Funktionen üblicherweise nicht thematisiert werden, kann geometrisch argumentiert und die zeitliche Winkelhalbierende durch die Summe der gestrichenen und ungestrichenen Basisvektoren in ct- und ct‘-Richtung (Gl. 3 rechts) repräsentiert werden.

Die mit Gl. (2) verbundenen Rechenschritte können bei ausreichenden zeitlichen Ressourcen problemlos von Hand durchgeführt werden, sofern die Multiplikation vektorieller Größen im Rahmen der Geometrischen Algebra entsprechend eingeübt wurde.

Wurden diese Grundlagen nicht eingeübt und sind keine zeitlichen Ressourcen vorhanden, dies im Unterricht ausführlich zu tun, kann alternativ auf Rechnerunterstützung zurückgegriffen werden. Da derzeit jedoch keine schulischen Taschenrechner existieren, die Rechnungen zur Geometrischen Algebra zulassen, wird vom Autor vorgeschlagen, das Programm-Tool GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer) als Taschenrechner-Ersatz einzusetzen (Horn 2017). Dies kommt auch Lernenden entgegen, die heute leider oft darauf konditioniert sind, selbst simpelste Multiplikationsaufgaben nur mit Taschenrechnerhilfe zu lösen.

Bei einer solchen Nutzung als Taschenrechner-Ersatz ist GAALOP nahezu selbsterklärend und kann ohne Vorkenntnisse und ohne eine längere Einarbeitungszeit sofort für einfache Berechnungen genutzt werden. Zeilen, die eine Einbindung in Programme anderer Programmiersprachen gewährleisten sollen, können dabei vollständig ignoriert werden. Darüber hinaus steht das Programm kostenfrei zur Verfügung und kann unter www.gaalop.de heruntergeladen werden, siehe auch (Schwinn et al. 2010).

GAALOP-Beispielaufgabe zur Lorentz-Transformation

Unter Rückgriff auf eine Teilaufgabe der schriftlichen Abiturprüfung des LK Physik der Otto-Hahn-Schule Berlin/Neukölln des Schuljahrs 2008/2009 kann die konventionelle Lösung (Abb. 2) durch Einsetzen in bekannte

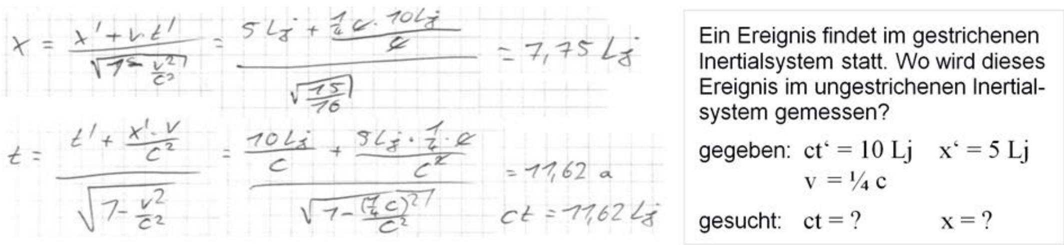

Abb. 2: Konventionelle Berechnung einer Lorentz-Transformation (weitere Umrechnungsschritte der Schüler sind gestrichen). Die ausführliche Aufgabenstellung findet sich in (Horn 2018, S. 704).

Formeln mit der Lösung auf Grundlage von GAALOP (Abb. 3) verglichen werden. Mit $\alpha/2 = ½ \operatorname{arc\,tanh} 0{,}25 = 0{,}1277$ ergibt sich ein Programmcode von lediglich vier Zeilen, wobei drei Zeilen für die Angabe der gegebenen Größen und nur eine einzige Zeile für die tatsächliche Berechnung nach Gl.

(2) benötigt wird. Nach Aktivierung des Optimize-Buttons werden wie erwartet die schon in Abb. 2 angegebenen Lösungswerte ausgegeben.

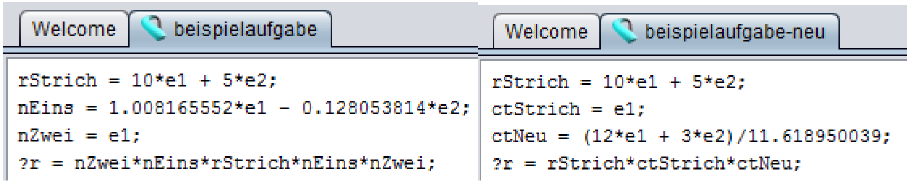

Abb. 3: Lösung der Abitur-Teilaufgabe mit Hilfe von GAALOP durch raumzeitliche Rotation (links) und durch Achsenvertauschung (rechts). Die alternative Lösung ohne hyperbolische Berechnung (Gl. 3, rechts) ist aus Platzgründen in (Horn 2018, S. 705, Abb. 3 unten) veröffentlicht.

Nicht nur die Kürze der Programmschritte und die mathematische Kompaktheit, sondern insbesondere die strukturelle Eleganz und die überzeugende geometrischen Deutung führen zu einem didaktisch tragfähigen Gesamtbild. Die geometrischen, algebraischen und programmiertechnischen Aspekte ergänzen sich gegenseitig didaktisch effektiv und sehr wirksam.

Ausblick

Zu wenig Aufmerksamkeit auch aus didaktischer Sicht erhält derzeit jedoch die alternative Herangehensweise, die raumzeitlich zweidimensionale Beispielaufgabe durch eine Achsenvertauschung zu lösen, indem die Transformation durch ein gemischtes Sandwich-Produkt (siehe Abb. 3 rechts)

$$\mathbf{r}_{neu} = \mathbf{n}_3\, \mathbf{n}_3\, \mathbf{r}\, \mathbf{n}_1\, \mathbf{n}_3 = \mathbf{r}\, \mathbf{n}_1\, \mathbf{n}_3 \qquad \text{mit} \;\; \mathbf{n}_3 = \cosh\alpha\, \gamma_t' + \sinh\alpha\, \gamma_x' \quad (4)$$

modelliert wird. Die ct'-Achse wird dabei mit der neuen ct-Achse vertauscht, was im zweidimensionalen Fall genau Abb. 1 (rechts) entspricht. Auch dies ist eine der vielen allereinfachsten Lösungsmöglichkeiten.

Literatur

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Horn, M. E. (2015a). Strukturierte Beschreibung von Reflexionen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (Band 1, S. 412–415). Münster: WTM-Verlag.

Horn, M. E. (2015b). Sandwich Products and Reflections. In: *PhyDid B – Didaktik der Physik*, DD 17.07, URL: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642.

Horn, M. E. (2017). Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (Band 2, S. 461–464). Münster: WTM-Verlag.

Horn, M. E. (2018). GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner. In Ch. Maurer (Hrsg.), *Qualitätsvoller Chemie- und Physikunterricht – normative und empirische Dimensionen*. GDCP-Tagungsband 38 (S. 703–706), Universität Regensburg.

Schwinn, Ch., Hildenbrand, D., Stock, F. & Koch, A. (2010). Gaalop 2.0 – A Geometric Algebra Algorithm Compiler. In V. Skala & E. M. Hitzer: *GraVisMa 2010 Workshop Proceedings* (S. 1–8). Plzen: Union Agency.