Martin Erik HORN, Berlin

Sind verallgemeinerte Moore-Penrose-Matrizeninverse vollständig?

Immer mehr einführende Wirtschaftsmathematik-Lehrbücher greifen das Themengebiet der Moore-Penrose-Matrizeninversen als elementaren Bestandteil wirtschaftsmathematischer Grundbildung auf (siehe z.B. Dadkhah 2011, Kap. 7). Unter anderem werden sie regelmäßig an der FH Schmalkalden und der TU Dortmund in einführenden Kursen behandelt (Schmidt & Trenkler 2015) und versuchsweise dieses Wintersemester 2017/2018 im englischsprachigen Kurs „Mathematics for Business and Economics“ an der HWR Berlin (Horn 2017 & 2018) thematisiert.

Didaktische Problematik

In den meisten Fällen werden verallgemeinerte Matrizeninverse allerdings auf rein algebraischer Basis eingeführt und diskutiert. Moore-Penrose-Inverse $\mathbf{A}^+$ lassen sich beispielhaft anhand vier algebraischer Bedingungen

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A}^+\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \tag{1}$$

$$(\mathbf{A}^+\,\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\,\mathbf{A} \qquad (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^+ \tag{2}$$

eindeutig fassen (Cline 1979, Th. 4, S. 18), (Ben-Israel & Greville 2003, S. 40), wobei das hochgestellte T die konjugierte Transposition bezeichnet.

Die strikte Fokussierung auf algebraische Darstellungen führt zur didaktischen Problematik, dass geometrische Gesichtspunkte entweder ganz vermieden oder – wie in (Cline 1979, Abs. 2.3, S. 21–27) – nur am Rande erwähnt werden.

Um ein vollständiges Bild dieser interessanten mathematischen Strukturen und darüber hinaus zusätzliche didaktische Handlungsalternativen zu erhalten, ist es hilfreich, verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse auch unter geometrischen Gesichtspunkten zu erörtern.

Geometrie und Konstruktion inverser Matrizen

Auf Grundlage von Grassmann’s Ausdehnungslehre (Grassmann 1844) und deren didaktischer Aufarbeitung in Form der Geometrischen Algebra (Hestenes 1971) können Lineare Gleichungssysteme und die sie beschreibenden Matrizen geometrisch gefasst und geometrisch gedeutet werden. Dabei macht bereits Grassmann – ohne es so zu benennen – von Pauli-Algebra und verallgemeinerter Pauli-Algebra Gebrauch, denn der zentrale Kernpunkt seines Ansatzes lautet modern formuliert: **Pauli-Matrizen repräsentieren Basis-Vektoren des dreidimensionalen Raums** (Hestenes 1971, S.

1018). Und verallgemeinerte Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren höher-dimensionaler Räume.

Aufbauend auf dieser geometrischen Fundierung kann die Determinante einer quadratischen Matrix mit dem orientierten Volumen bzw. Hyper-Volumen des Parallelotops, das durch die Koeffizientenvektoren aufgespannt wird, identifiziert werden. Wird einer der Koeffizientenvektoren des Parallelotops durch einen der Basisvektoren ersetzt, entspricht das orientierte Volumen sodann dem Wert der entsprechenden Unterdeterminante.

Die Division dieser beiden Hyper-Volumina

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)^{-1}\,(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{j-1} \wedge \sigma_i \wedge \mathbf{a}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n) \quad (3)$$

ergibt das Element der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ in Zeile i und Spalte j.

Einbettung Linearer Gleichungssysteme in höherdimensionale Räume

Ein konsistentes, eindeutig lösbares Lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{r}$, das durch eine quadratische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ beschrieben wird, kann durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{r}$ mit Hilfe der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ gelöst werden. Geometrisch kann die Beziehung zwischen den n linear unabhängigen Koeffizientenvektoren und dem linear von ihnen abhängigen Ergebnisvektor $\mathbf{r}$ als Linearkombination dieser Vektoren

$$\mathbf{a}_1\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2\,\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n\,\mathbf{x}_n = \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_i = a_{1i}\,\sigma_1 + a_{2i}\,\sigma_2 + \ldots + a_{ni}\,\sigma_n \quad (4)$$

didaktisch anschaulich dargestellt werden (siehe Abb. 1 links).

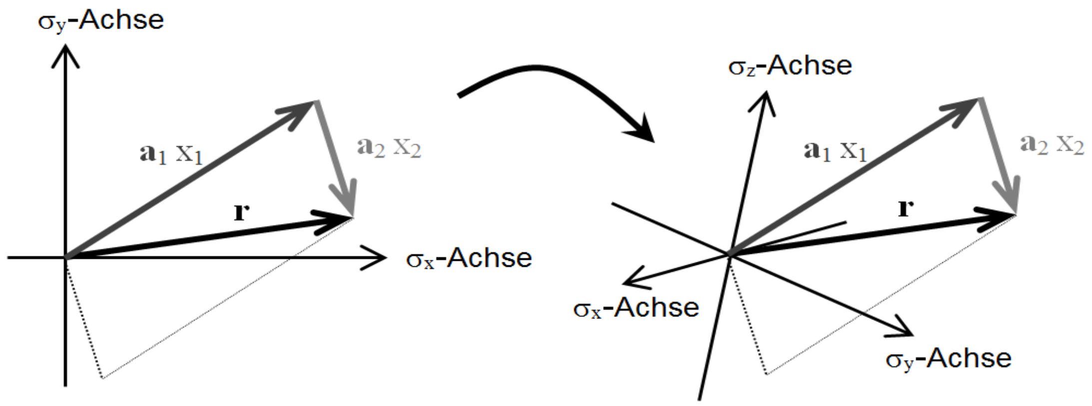

Abb. 1: Ein Lineares Gleichungssystem $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 = r$ mit zwei Unbekannten x_1, x_2 wird im zweidimensionalen Raum (links) und in einem dreidimensionalen Raum eingebettet (rechts) dargestellt.

Nun wird das geometrisch identische Lineare Gleichungssystem schräg in ein beliebiges höherdimensionales Koordinatensystem eingebettet. Da die Änderung von Koordinatenachsen die geometrische Situation nicht ändert, bleiben auch die Verhältnisse der orientierten Hyper-Volumina (also in Abb. 1 der orientierten Flächeninhalte $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$, $\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{r}$) gleich.

Eine Änderung des Koordinatensystems wirkt jedoch auf die algebraische Beschreibung der Vektoren, die dann eine der Dimension m des Koordinatensystems entsprechenden Anzahl an Komponenten m > n (also in Abb. 1 drei anstelle von nur zwei Komponenten) aufweisen werden.

Das so modifizierte Lineare Gleichungssystem ist nun überdeterminiert und besitzt jetzt mehr Gleichungen als Unbekannte und die Koeffizientenmatrix **A** damit mehr Zeilen $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ als Spalten $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgrund der unveränderten geometrischen Situation kann die Matrizeninverse der verallgemeinerten Pauli-Algebra erneut unter Rückgriff auf Gl. (3) berechnet werden (Horn 2016 – 2018). Diese ist dann jedoch ebenfalls eine Rechteck-Matrix mit einer geringeren Anzahl an Zeilen j als Spalten i.

Da Raumdimension und Anzahl der Variablen nun allerdings nicht mehr übereinstimmen, heben sich die richtungsbestimmenden Größen in Zähler und Nenner von Gl. (3) nicht vollständig weg. Deshalb besitzen verallgemeinerte Pauli-Matrizeninverse Elemente, die nicht nur skalare, sondern auch flächenhafte, bivektorielle Anteile aufweisen.

Diese zusätzlichen Anteile führen auf eine Ambivalenz in der Konstruktion der Inversen. Werden anstelle der durch eine linksseitige Prä-Division generierten verallgemeinerten Matrizeninverse $\mathbf{A}^{-1}$ jetzt Matrizeninverse $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ durch eine rechtsseitige Post-Division

$$(\underline{\mathbf{A}}^{-1})_{ij} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{j-1} \wedge \sigma_i \wedge \mathbf{a}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)\,(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)^{-1} \qquad (5)$$

generiert, kehren sich die Orientierungen der bivektoriellen Anteile um. Da $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$ die Einheitsmatrix **E** ergibt, sind die ersten drei Moore-Penrose-Bedingungen von Gl. (1 & 2 links) erfüllt. Die rechte Gl. (2) gilt jedoch nur für den Skalarteil der Pauli-Matrizeninversen $\mathbf{A}^{-1}$ bzw. $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$.

Verallgemeinerte Moore-Penrose-Matrizeninverse

Im gerade eben diskutieren geometrischen Sinn sind Moore-Penrose-Matrizeninverse $\mathbf{A}^{+}$ nicht vollständig. Sie können als Aufaddition der durch Prä- und Post-Division erzeugten Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ und $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ gebildet werden (Gl. 6 links). Der rein bivektorielle Matrizenteil, der hier mit $\mathbf{A}^{-}$ bezeichnet werden soll (Gl. 6 rechts), entsteht dann durch Differenzbildung.

$$\mathbf{A}^{+} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A}^{-1} + \underline{\mathbf{A}}^{-1}) \qquad\qquad \mathbf{A}^{-} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A}^{-1} - \underline{\mathbf{A}}^{-1}) \qquad (6)$$

In der Kursdurchführung an der HWR Berlin (Horn 2017) wurde dieser didaktische Pfad genommen. Da die Geometrische Algebra zuvor zur Lösung einfacherer Aufgaben eingesetzt und eingeübt wurde, konnten die Studierenden diesen Pfad auch erfolgreich mitbeschreiten. Dies führt dazu, dass

Moore-Penrose-Matrizeninverse als skalarwertiger Teil von natürlicheren, geometrisch fundierten Matrizeninversen verstanden werden, deren Elemente üblicherweise auch höherdimensionale Anteile besitzen.

Ausblick

Für kleinere nicht-quadratische Matrizen mit nur wenigen Zeilen und Spalten kann durch direkten Vergleich mit

$$A^{+} = (\mathbf{A}^{T}\, \mathbf{A})^{-1}\, A^{T} \qquad (7)$$

(Dadkhah 2011, Gl. 7.14, S. 147) leicht gezeigt werden, dass die mit Hilfe von Gl. (6) links berechneten Moore-Penrose-Inversen korrekt sind und Gl. (7) entsprechen, falls das äußere Produkt der Koeffizientenvektoren nicht zu Null verschwindet. Für größere nicht-quadratische Matrizen bleibt die mathematische Welt aufgefordert, zu zeigen (oder eventuell zu widerlegen), dass der in diesem Beitrag beschriebene Zusammenhang korrekt ist.

Literatur

Ben-Israel, A. & Greville, T. N. E. (2003). *Generalized Inverses. Theory and Applications* (CMS Books in Mathematics). 2. Auflage, New York, Berlin: Springer.

Cline, R. E. (1979). *Elements of the Theory of Generalized Inverses for Matrices*. (UMAP Expository Monograph Series), Newton: Education Development Center.

Dadkhah, K. (2011). *Foundations of Mathematical and Computational Economics*. 2. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Grassmann, H. (1844). Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil; Lineale Ausdehnungslehre. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.

Hestenes, D. (1971). Vectors, Spinors, and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics. *American Journal of Physics*, No. 9, Vol. 39, S. 1013–1027.

Horn, M. E. (2016a). Inverse von Rechteck-Matrizen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Band 1, S. 457–460). Münster: WTM-Verlag.

Horn, M. E. (2016b). More Examples of Non-Square Matrix Inverses. Übersetzte und ergänzte Fassung von (Horn 2016a), veröffentlicht als Anhang von Beitrag DD 05.19 in: *PhyDid B – Didaktik der Physik – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung* (Online-Zeitschrift), URL: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/723/868.

Horn, M. E. (2016c). Moderne Lineare Algebra im wirtschaftsmathematischen Kontext. In W. Paravicini & J. Schnieder (Hrsg.): *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015* (S. 103–129). Münster: WTM-Verlag.

Horn, M. E. (2017). Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part VII: Generalized Matrix Inverses. Zur Veröffentlichung vorgesehen als Anhang von (Horn 2018).

Horn, M. E. (2018). Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *PhyDid B*

Schmidt, K. & Trenkler, G. (2015). *Einführung in die Moderne Matrix-Algebra. Mit Anwendungen in der Statistik*. 3. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Gabler.