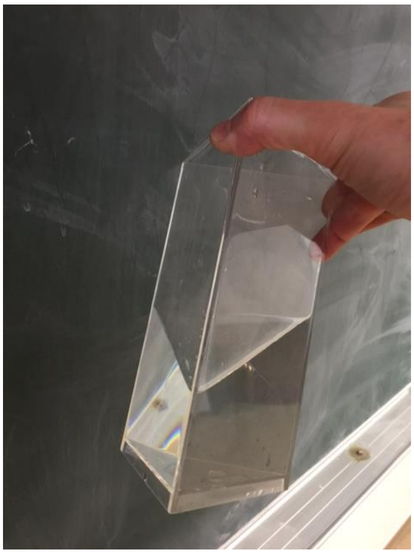
Hans HUMENBERGER, Wien

Experimente an gefüllten Prismen – was haben Schwerpunkte damit zu tun?

Das Thema „Schwerpunkte“ gibt es sowohl in der Physik als auch in der Mathematik (Geometrie). Es ist nicht leicht zu unterrichten, weil die zugehörigen Grundlagen nicht immer von elementarer Natur sind. Bei diesem Thema wird der Unterschied zwischen Flächen- und Eckenschwerpunkt wichtig, aber in der ursprünglichen Fragestellung bzw. Beobachtung eines Phänomens ist dies vielleicht noch gar nicht zu erahnen. Konkrete Experimente („hands-on-Mathematik“) stehen zu Beginn als Einstieg in das Thema, dadurch kann die Motivation sich mit zugrunde liegenden Fragen genauer zu beschäftigen oft erhöht werden (vgl. Ludwig/Oldenburg 2007). Der Fokus liegt dabei auf *elementaren* Betrachtungen, die nicht z. B. von Integralrechnung geprägt sind.

Ein erstes Experiment



Ein erstes Experiment startet bei dreieckigen (geraden) Prismen. Es gibt im Lehrmittelhandel z. B. eigene „Füllkörper“, die dazu gedacht sind durch Umschütten von Flüssigkeiten Volumina zu bestimmen. Diese eignen sich gut für den folgenden Zweck.

Das Prisma ist bis ca. zur halben Höhe mit Wasser gefüllt. Dann wird es gekippt, so dass die „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten nicht mehr alle gleich sind (in der nicht gekippten Lage sind diese drei Längen natürlich alle gleich). Für verschiedenste Lagen (so dass die Grundfläche immer vollständig mit Wasser bedeckt bleibt) können nun die Schülerinnen und Schüler (S&S) die Längen der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten messen („enaktiv“).

Mögliche Fragen:

(1) Was beobachtet ihr bzgl. dieser Längen?
(2) Etwas zielgerichteter (weniger offen): Was beobachtet ihr bzgl. der Summe der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten?

Wenn man hier misst, wird man feststellen, dass die in (2) angesprochene Summe konstant bleibt. Dabei stellen sich in natürlicher Weise einige Fragen:

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

- Ist das wirklich exakt so, oder nur ungefähr?
- Wäre das auch bei anderen Prismen mit dreieckiger Grundfläche so?
- Wenn es so ist, kann man das auch begründen?
- Gibt es einen Punkt der Grundfläche, über dem sich die Wasserhöhe dabei nie ändert?
- Wie wird das wohl bei anderen Vielecken als Grundfläche sein?

Der unmittelbare Anlass für den Autor, sich mit diesem Thema etwas genauer auseinanderzusetzen, war ein Vortrag von R. Oldenburg in Wien und eine dort verwendete Literaturstelle (Hashimoto 1997).

Erkundungen mit GeoGebra

Vor einer genaueren mathematischen Analyse wird man zunächst einmal wietere Bestätigungen einholen, vermutlich mit einer 3D-Geometrie-Software, z. B. GeoGebra. Zu diesem Zweck muss man zunächst das Kippen des Prismas ein wenig umdeuten.

Dass die Summe der „Wasserhöhen" an den Seitenkanten konstant ist, kann auch so ausgedrückt werden: Wenn ein gerades dreiseitiges Prisma schräg abgeschnitten wird, dann kann man sein Volumen V berechnen durch: $V = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$ (in der nicht gekippten Lage ist $\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} = h$, die „Wasserhöhe"). Das arithmetische Mittel der drei Höhen an den Kanten wäre dann offenbar jene Höhe, mit der man den Grundflächeninhalt G multiplizieren muss, um das Volumen V zu erhalten.

Die 3D-Version von GeoGebra kann Volumina von Prismen und Pyramiden bestimmen (DGS als Messinstrument), schon die 2D-Version Flächeninhalte von Vielecken.

Damit ist es leicht, eine Überprüfung mit GeoGebra zu realisieren: Man misst den Grundflächeninhalt G und die drei Höhen $h_{1,2,3}$ an den Kanten eines schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, womit man $G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$ berechnen kann. Andererseits kann GeoGebra das Volumen des gesamten schräg abgeschnittenen Prismas durch Teilvolumina (Pyramiden) bestimmen. Man wird feststellen, dass die Differenz der angesprochenen beiden Werte immer Null ist, das bedeutet: GeoGebra hat eindrucksvoll bestätigt, dass das Volumen so eines schräg abgeschnittenen dreiseitigen Prismas immer $V = G \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$ zu sein scheint. Übertragen auf das Ausgangsproblem mit dem Wasser und dem Schräghalten: Die Summe der Längen der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten scheint wirklich konstant zu sein. Diese Bearbeitungsebene (nicht mehr enaktiv, noch nicht symbolisch; die Bezeichnung *ikonisch* passt hier allerdings auch nicht ganz) wird möglich durch ein 3D-Konstruktionsprogramm wie GeoGebra, primär eingesetzt als Messinstrument.

Im Anschluss stellt sich natürlich die Frage nach Begründungen bzw. Beweisen: WARUM ist das so? Zugehörige Begründungen haben mit Ecken- und Flächenschwerpunkten zu tun, leider können sie aus Platzgründen hier nicht näher ausgeführt werden (vgl. Humenberger 2018). Es stellt sich heraus, dass die Summe der Wasserkantenlängen genau bei jenen Vielecken als Prismengrundfläche konstant ist, bei denen gilt: Eckenschwerpunkt = Flächenschwerpunkt. Das ist bekanntlich bei allen Dreiecken und im Reich der Vierecke genau bei den Parallelogrammen der Fall. Jener Grundflächenpunkt, über dem das Wasser konstante Höhe hat, ist der Flächenschwerpunkt (auch dafür verweisen wir auf Humenberger 2018).

Fachdidaktisches Resumé

Es soll hervorgehoben werden, dass es für dieses Thema verschiedenste Herangehensweisen gibt. Einerseits die enaktive Ebene mit den Behältern, andererseits die Ebene mit Technologie (z. B. GeoGebra 3D als Messinstrument) und drittens die Ebene mit Begründungen. Diese Vielfalt an Möglichkeiten erhöht das fachdidaktische Potential dieses Themas durchaus. Es ist auch ein lehrreiches Beispiel dafür, dass man nicht so ohne weiteres Phänomene übertragen kann: Z. B. läge es ja doch in einer gewissen Weise nahe, die „Summenkonstanz der Wasserhöhen“ (bei Dreiecken, Rechtecken, Parallelogrammen als Grundfläche bestätigt und vielleicht sogar begründet) auch bei allgemeinen Vielecken als Grundfläche zu vermuten. Mit GeoGebra kann man sich leicht vergegenwärtigen, dass das im Allgemeinen nicht mehr so ist, leider gibt es im Lehrmittelhandel kaum prismatische Füllkörper (vierseitig), deren Grundfläche kein Parallelogramm ist, so dass zugehörige Realexperimente vermutlich nicht leicht zu realisieren sind. Es gibt – bei genauerer Betrachtung – auch ein einfaches (Plausibilitäts-)Argument, warum im allgemeinen Fall nicht mehr $V = G \cdot \frac{h_1 + \ldots + h_n}{n}$ gelten wird (dabei ist *G* der Grundflächeninhalt und h_i die „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten): Wenn man aus einer Kante h_k durch

Wegschneiden eines sehr kleinen Dreiecks der Grundfläche zwei Kanten mit den Höhen h_{k1} und h_{k2} (praktisch gleich wie h_k) macht, so wird sich dadurch zwar V praktisch nicht ändern, aber die Summe und damit der Mittelwert der h_i schon (der Wert h_k bekäme dadurch ja „doppeltes“ Gewicht). Auch solche Plausibilitätsüberlegungen haben einen hohen Wert in Erkenntnisprozessen (insbesondere im Unterricht), weil sie das „Warum von Phänomenen“ gut erklären, also das Verständnis durchaus erhöhen.

Dieses Thema eignet sich auch für differenzierenden Unterricht:

- **Stufe 1:** S&S kommen in selbständiger Arbeit zur „dringenden Vermutung“, dass die Summe der „Wasserhöhen“ an den Seitenkanten konstant zu sein scheint in den betrachteten Fällen. Diese Stufe sollte praktisch allen S&S zumutbar sein.
- **Stufe 2:** Wenn sie diese Experimente z. B. mit GeoGebra nachkonstruieren und dabei das 3D-Programm primär als Messinstrument einsetzen können, sind sie schon eine Stufe weiter und haben insgesamt schon gute Arbeit geleistet. Diese Stufe wird nicht mehr von allen S&S erreicht werden, aber von vielen.
- **Stufe 3:** Wenn Lernende dies für Dreiecke und Parallelogramme selbständig *begründen* können, ist dies schon eine schöne Steigerung. Vermutlich ist bei der Begründung – außer in Ausnahmefällen – einiges an Lehrerhilfe nötig, aber auch dann gibt es einen deutlichen Zugewinn an Erkenntnissen (Lernen) durch *Betreiben von Elementarmathematik* (*Mathematik als Prozess*).
- **Stufe 4:** Die Betrachtungen der verschiedenen Schwerpunkttypen und die zugehörigen Überlegungen, dass das in Rede stehende Phänomen genau für Grundflächenvielecke mit Eckenschwerpunkt = Flächenschwerpunkt gilt, kann in der Schule auch unterbleiben, ist aber vielleicht ein lohnendes Thema in der Lehrerausbildung (Elementargeometrie, Koordinatengeometrie, Physik, Analysis).

Literatur

Becker, J.P. & Shimada, S. (Hrsg.) (1997): The Open-Ended Approach – A New Proposal for Teaching Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, McGraw-Hill, Columbus

Hashimoto, Y. (1997): An Example of Lesson Development – The Water-Flask Problem. In: Becker, J.P., Shimada, S. (Hrsg.), 10–22

Humenberger, H. (2018): Experimente an gefüllten Prismen – was haben Schwerpunkte damit zu tun? Ausführlicherer Aufsatz zu diesem Thema. In: Der Mathematikunterricht 64, 1, 24 – 34

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007): Lernen durch Experimentieren – Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. Basisartikel in: mathematik lehren 141, 4–11