

Potenzen und Potenzrechnung – eine Herausforderung

Wie viele Sandkörner gibt es auf allen Stränden der Erde? Fragen wie diese und andere nach nicht wirklich zu erfassenden Anzahlen, nach großen Zahlen, beschäftigen die Menschheit von jeher. Vor ungefähr 2300 Jahren ging man davon aus, dass es gar keine Zahl gibt, um die Anzahl der Sandkörner zu beschreiben. Archimedes versuchte eine Schätzung auf der Basis von Myriaden (altgriech. myrias – zehntausend). Damit war bereits die Idee geboren, große Zahlen mit Hilfe von hohen 10er Potenzen verkürzt zu erfassen. Die „Unbequemlichkeit“, die wiederholte Multiplikation gleicher Faktoren als nebeneinanderstehende Symbole darzustellen, formulierte auch Euler (1770) und schlug vor, die Anzahl an Faktoren verkleinert oben und rechts der Basiszahl zu schreiben, also a^n . Das ist die früheste explizite Verwendung der Potenzschreibweise, wie wir sie auch heute noch nutzen.

So faszinierend große Zahlen sind, für Lernende jeden Alters birgt die Potenzschreibweise und das Umgehen mit Potenzen große Schwierigkeiten. Dies zeigt sich zum Beispiel im Rahmen mathematischer (Vor-) Kursen und Hochschulveranstaltungen (vgl. u.a. Büchter 2016). Eine wichtige Ursache der Probleme scheint zu sein, dass die – meist auswendig – gelernten Regeln und Gesetze nicht verstanden und nachvollzogen werden. Sie haben für Lernende den Charakter einer „Black-Box“, da die Bedeutung der Potenz mit ihren einzelnen symbolhaften Elementen (besonders des Exponenten) nicht verstanden wird und man deshalb die Struktur eines Rechenausdrucks oder algebraischen Terms nicht erfasst. Damit fehlt die richtige Systematik, nach der passenden Regel zu suchen und diese angemessen anzuwenden. Man greift eher auf bekannte Strategien aus anderen Operationen zurück, die dann Anwendung finden, auch wenn sie im jeweiligen Kontext nicht geeignet sind. Der Conceptual Change zur neuen Operation des Potenzierens wurde nicht vollzogen, das Verständnis auf konzeptueller Ebene nicht entwickelt. Genau dies müsste vor den Rechenregeln entwickelt werden, gemäß dem Motto „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ (vgl. u.a. Hahn & Prediger 2008). Doch welche Vorstellungen müssen aufgebaut werden, um souverän und flexibel mit Potenzen rechnen zu können und welche Grundvorstellungen von Potenzen lassen sich explizieren, um diesem Anspruch genügen zu können? Entwicklung und Formulierung geeigneter Grundvorstellungen zu Potenzen ist das Ziel des hier vorgestellten Projektes.

1. Grundvorstellungen

Die Theorie der Grundvorstellungen beschreibt die Verbindung zwischen der Mathematik und der Realität auf Vorstellungsebene (vgl. vom Hofe 1992). Vom Hofe (1992) unterscheidet drei Ebenen von Grundvorstellungen. Die *normative* stellt die Grundidee des Begriffs dar und wird als Soll-Zustand erfasst. Die *deskriptive* Ebene beschreibt die individuellen Vorstellungen von Lernenden, gibt also den Ist-Zustand wieder, und die *konstruktive* Ebene stellt die Verbindung zwischen normativer und deskriptiver Ebene dar, sodass die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen konstruktiv unterstützt sowie mögliche Fehler behoben werden können. Anhand dieser Unterteilung werden die Forschungsfragen für die Studie formuliert. Normative Grundvorstellungen verhelfen zu einem erfolgreichen Lehren und Lernen, denn sie leiten die Suche nach passenden Kontexten, die im Sinne des genetischen Prinzips zu einem neuen mathematischen Konzept führen (Leuders et al. 2012). Dadurch wird ermöglicht, dem neuen mathematischen Begriff Sinn zu geben, um so mentale Modelle entstehen zu lassen, die eine Repräsentation auf Vorstellungsebene erlauben. Schließlich können für die Lernenden neue Situationen eingeführt werden, so dass das neu erworbene Wissen angewendet werden kann (vgl. Hafner 2012).

Zum Lerngegenstand der Potenzrechnung gibt es bisher keine systematischen Arbeiten, die sich mit der Identifizierung und Formulierung von Grundvorstellungen beschäftigen. Weber (2002) beschreibt lediglich die Verständnisstufen auf Basis der APOS-Theorie von Dubinsky (1991) als Prozess des Potenzierens, einen Potenzterm als Ergebnis eines Prozesses und – für reelle Exponenten – als Verallgemeinerung.

2. Forschungsfragen

Die Forschungsfragen werden anhand des theoretischen Hintergrunds auf den drei Ebenen *normativ* (Theoriebildung – F1), *deskriptiv* (Diagnose – F2.1 bis F2.3) und *konstruktiv* (Förderung – F3) unterschieden.

F1: Welche Grundvorstellungen zu Potenzen lassen sich in Aufgaben und Anwendungskontexten als relevant und sinnvoll erkennen?

F2.1: Welche Probleme gibt es im Umgang mit Potenzen?

F2.2: Über welche Vorstellungen verfügen Lernende über Potenzen?

F2.3: Inwieweit sind Lernende in der Lage, Anwendungskontexte bzgl. Potenzen zu erkennen?

F3: Inwieweit können Defizite durch Ausbildung sinnvoller Grundvorstellungen behoben werden?

In dieser Phase liegt der Fokus nur auf die ersten beiden Forschungsfragen.

3. Methodologie

Die Studie wird in drei Stufen unterteilt. In der Vorarbeit hat an der Universität Duisburg-Essen eine erste Expertenbefragung stattgefunden ($n=40$). Aufgrund dieser Befragung, zusammen mit einer Sachanalyse des Gegenstands Potenzen und der Sichtung einschlägiger Literatur - insbesondere zu Grundvorstellungen der Multiplikation – ergab sich eine erste Festlegung von Grundvorstellungen für Potenzen (*normative Ebene*).

Die Vorstudie bestand aus der Entwicklung eines Tests und dessen Einsatz mit 120 Studierenden (*deskriptive Ebene*). Mit insgesamt 27 Items wurde sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen geprüft.

Letzter Schritt ist die Hauptstudie, bei der Interviews mit Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden sollen, um Fehlvorstellungen beim Umgang mit Potenzen aufzudecken und zu verstehen (*deskriptive Ebene*). Das Testinstrument soll in Schulen eingesetzt werden, um anhand von Mustern die Fehlerkategorien zu verfeinern. Auf der Basis der Ergebnisse der Hauptstudie soll ein Förderkonzept in Form eines (online) Formative-Assessments entwickelt und erprobt werden (*konstruktive Ebene*).

4. Erste Ergebnisse

Erste Ergebnisse zur Theoriebildung (*normative Ebene*) und zu Fehlerkategorien werden im Folgenden präsentiert. Es lassen sich vier Grundvorstellungen explizieren: *verkürzte Multiplikation*, *räumliche Erfassung*, *Kombinatorik-* und *Funktionsvorstellung*. Die *verkürzte Multiplikation* beinhaltet sowohl einen zeitlich-sukzessiven, dynamischen Aspekt (Prozess des Hintereinanderausführens von Multiplikationen) als auch einen arithmetisch-statischen Aspekt, wenn sehr große Zahlen in Potenzschreibweise komprimiert ausgedrückt werden. *Räumlich erfasst* werden Potenzen als Dimensionen, nämlich als Flächeninhalt („hoch 2“) oder als Volumen („hoch 3“). Dies ist zum einen statisch und als räumlich-simultanes Erfassen von Objekten zu sehen. Zum anderen kann das räumliche Erfassen aber auch ein dynamisches, räumlich-sukzessives und rekursives Betrachten sein, wenn darin eine Visualisierung eines optisch iterativen Prozesses gesehen wird, z.B. wenn Mengen immer um den gleichen Faktor vermehrt als Bild erscheinen. Der *kombinatorische Aspekt* beschreibt bei der Potenz a^n die Anzahl aller möglichen Variationen, n Elemente aus a vorhandenen mit Zurücklegen auszuwählen. Zuletzt gibt es die *funktionale Vorstellung*, bei der die Potenz a^n mit dem Funktionswert einer Potenz- oder Exponentialfunktion assoziiert wird.

Aus der Fehleranalyse des Tests wurden erste Kategorien der auftretenden Fehlerarten aufgestellt und verglichen mit denen, die Malle (1993) allgemein für elementare Algebra aufgestellt hat. Unter den 13 Kategorien gab es folgende Fehlertypen mit den entsprechenden Anteilen an falschen Lösungen: *Nichtbeachtung der Prozedurhierarchie* (z.B. $-5^0 = 1$, 97% falsch), *Unvollständige Vereinfachung* (z.B. Die Hälfte von 2^{60} ist $\frac{2^{60}}{2}$, 64% falsch), *Termstruktur bzw. Erkennen der Struktur* (z.B. $(3b^2cd^3)^2 = 3b^4 \cdot cd^6$, 72% falsch), usw.

5. Ausblick

Der Test zu Potenzen und Potenzrechnung wird in der Hauptstudie an Schulen eingesetzt, um den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler zu erheben, auch im Vergleich zum Leistungsstand bei Studierenden. Langfristiges Ziel ist es, differenzierende Förderkonzepte zu entwickeln. Die Interviews mit Schülerinnen und Schülern können dabei wertvolle Auskunft liefern, um die Fehlvorstellungen besser zu verstehen, um das Design der weiteren Fördermaßnahmen zielgerichtet und individuell gestalten zu können. Nach der Durchführung der Interviews werden zusätzlich mögliche Ursachen bzw. Fehlerquellen bei den Fehlertypen ergänzt, um so einen Beitrag zu leisten, das Wissen um Fehler in der Potenzrechnung und ihre Ursachen systematisch zu erfassen.

Literatur

- Büchter, A. (2016). *Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule-Diskussion aktueller Herausforderungen und Lösungsansätze für mathemathikhaltige Studiengänge*. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*, S. 201-204.
- Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra*. St. Petersburg: Royal Academy of Sciences.
- Hafner, T. (2012). Mentale Modelle mathematischer Inhalte. *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29 (3/4), 163-198.
- Leuders, T., Prediger, S., Hußmann, S. & Barzel, B. (2012). *Genetische Lernarrangements entwickeln*. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 541-544.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.
- Weber, K. (2002). *Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions*. Second International Conference on the Teaching of Mathematics (S. 1-10). Crete, Greece: University of Crete.