

## **Welchen Beitrag sollten fachwissenschaftliche Veranstaltungen der ersten Phase für die im Rahmen der Unterrichtsplanung erforderliche Rekonstruktion mathematischer Schulhalte leisten?**

### **1. Einleitung**

Fachwissenschaftliche Veranstaltungen sind ein fester Bestandteil der ersten Phase der Lehrerbildung. Ihr Nutzen für die praktische Berufstätigkeit scheint aber durchausentwicklungsfähig (vgl. Klein, 1924; Terhart, 2000; Beitrag von Bauer & Hefendehl-Hebeker in diesem Band). Die alltägliche Unterrichtsplanung von Mathematiklehrkräften ist ein essentieller Teil dieser Berufstätigkeit. Sie manifestiert sich im fachlichen Bereich auf der Folie eines genetisch-sinnstiftenden und verständnisorientierten Mathematiklernens im Kern in einer *Rekonstruktion* fertiger und häufig formalisierter Inhalte (Prediger et al., 2013). Im Beitrag wird am Beispiel der Quersummenregel skizziert, inwiefern diese *Rekonstruktion* einerseits ein herausfordernder und anspruchsvoller Prozess ist und andererseits, wie fachwissenschaftliche Veranstaltungen an Hochschulen diesen unterstützen sollten.

### **2. Verständnisorientierung**

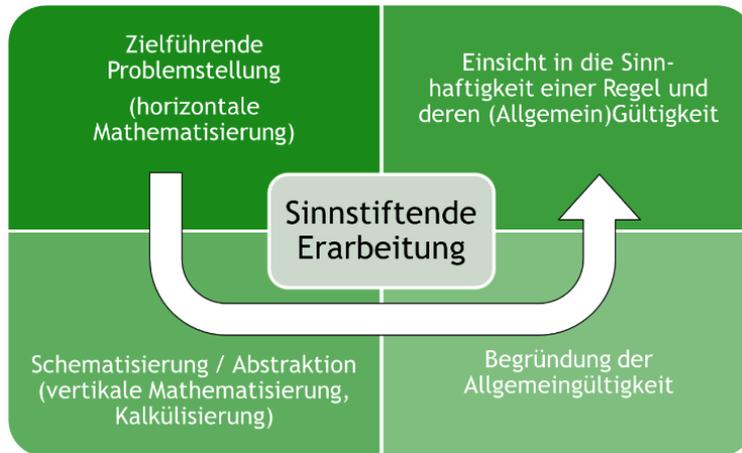
Bereits Wertheimer (1945/1964) unterscheidet zwischen einem oberflächlichen, blinden „Nachmachen“ (mechanisches Lernen) und einem tiefergehenden, an den Gegebenheiten der Sache orientierten „Verstehen“ (verständnisorientiertes Lernen). Verständnisorientiertes Lernen bedeutet, die „inneren Beziehungen“ einer Sache „strukturklar“ einzusehen (Aebli, 1980/81). Reusser & Pauli (2013) diskutieren die Frage, woran Verständnisorientierung festgemacht werden kann und arbeiten drei zentrale Aspekte heraus:

1. Selbsttätigkeit
2. Auswahl, Anordnung und kognitive Aktivierungsqualität der im Unterricht bearbeiteten Aufgaben
3. Lernunterstützung

### **3. Sinnstiftend-genetische Erarbeitung**

Basis dieses Beitrags ist eine moderat-konstruktivistische lehr-lerntheoretische Perspektive in Verbindung mit einem genetischen sowie im methodischen Bereich einem forschend-entdeckenden Lernen. Darüber hinaus ist die auf Hans Freudenthal zurückgehende Vorstellung grundlegend, dass sich die

mathematikunterrichtliche Erarbeitung neuer Inhalte idealtypisch in rekursiven Lernstufen oder -schritten vollziehen sollte. Lernergebnisse sollten nach



Freudenthal immer wieder einem erneuten Bearbeitungsprozess unterworfen werden, um auf diese Weise sukzessive formaler zu werden. Es geht also nicht um eine horizontale Aneinanderreihung von Wissen sondern um ein kontinuierlich tieferes

Verstehen, das insbesondere auch schülergemäße Begründungen für mathematische Inhalte mit einschließt.

Die obenstehende Abbildung illustriert, wie sich vor diesem Hintergrund sinnstiftende Erarbeitungen mathematischer Regeln idealtypisch strukturieren lassen (vgl. Jaschke, i. V.): In einem ersten Schritt bearbeiten die Lernenden eine auf die Nützlichkeit des mathematischen Inhalts abzielende Problemstellung im Sinne einer horizontalen, inner-oder außermathematischen Mathematisierung, wobei möglichst verschiedene Lösungsvarianten oder -ansätze realisierbar sein sollen. Die von den Lernenden erarbeiteten Lösungen werden dann im zweiten Schritt auf ihre Effizienz, strukturellen Eigenarten und Generalisierbarkeit überprüft. Ziel ist es dabei, zu einer fortschreitenden Schematisierung von Vorgehensweisen zu gelangen, so dass am Ende eine Regel formuliert werden kann. Im dritten Erarbeitungsschritt geht es dann darum, die im zweiten Schritt erarbeitete Regel in ihrer Allgemeingültigkeit einzusehen. Dazu müssen die Lernenden in schülergemäßer, anschaulich-inhaltsorientierter Form tragfähige Verknüpfungen zwischen den Voraussetzungen, Darstellungen und Begründungen der Regel herstellen.

#### 4. Problemstellung für eine verständnisorientierte Unterrichtsplanung

Überträgt man die in den Abschnitten 2 und 3 dargestellten Aspekte von Verständnisorientierung und einer sinnstiftend-genetischen Erarbeitung nun konkret auf die Unterrichtsplanung zum beispielhaften Unterrichtsinhalt „Quersummenregel“, so stellt sich für eine Lehrkraft die folgende *Rekonstruktionsaufgabe*: *Mit welcher kognitiv aktivierenden Aufgabensequenz können Lernende die Struktur, die „inneren Beziehungen“ der Quersummenregel möglichst selbsttätig einsehen? Und wie kann dabei eine geeignete Lernunterstützung aussehen?* Aus einer fachlichen Perspektive sind damit die folgenden Erwierungsherausforderungen verbunden:

- Welches sind die zentralen *Verstehensinhalte* der Quersummenregel für die Lernenden?
- Worin besteht die inner- oder außermathematische *Nützlichkeit* der Quersummenregel?
- Welche inner- oder außermathematischen *Kontexte* erscheinen zur Erarbeitung der Quersummenregel sinnstiftend?
- Welche *Lernschritte* und damit assoziierte Fragestellungen sind bei der Erarbeitung der Quersummenregel für ein verständnisorientiertes und sinnstiftendes Lernen wichtig?
- Wie kann die Quersummenregel schülergemäß *begründet* werden?

Es ist leicht vorstellbar und überaus plausibel, dass die Vermittlung *fertiger* Mathematik, so wie sie nach wie vor in vielen fachwissenschaftlichen Veranstaltungen der ersten Phase vollzogen wird, angehenden Lehrkräften nur eine sehr begrenzte Hilfestellung bei der Beantwortung dieser Fragen liefert. Denn die Beantwortung ist inhaltsspezifisch und bis dato außerdem nur in sehr begrenztem Maße standardisier- oder algorithmisierbar (Nicht umsonst sprechen Prediger et al. (2013) hierbei von einem kreativen Prozess). Deutlich wird dies beispielsweise bei der Ermittlung der zentralen Verstehensinhalte eines mathematischen Inhalts. Hierzu müssen Lehrkräfte nach Drollinger-Vetter (2011, S. 202) auf ihr fachspezifisch-psychologisches Wissen zurückgreifen, ohne dass allerdings ersichtlich ist, welches Wissen dafür *genau* benötigt wird bzw. wie dieses Wissen *genau* verwendet werden soll. Auch die Ermittlung einer lernförderlichen Schrittfolge (vgl. Kapitel 3) ist bislang kaum rezeptartig möglich sondern verlangt eine logisch-hierarchische Strukturierung der ermittelten Verstehensinhalte.

Langjährige Erfahrungen des Erstautors insbesondere auch in der zweiten Phase der Lehrerbildung deuten stark darauf hin, dass die skizzierte fachliche *Rekonstruktion* angehende wie praktizierende Mathematiklehrkräfte vor erhebliche Probleme stellt. Und dies auch dann, wenn die formal-symbolische Begründung der Quersummenregel, etwa durch eine Vorlesung zur Zahlentheorie, bekannt und vielleicht sogar reproduzierbar ist.

#### **4. Was sollten fachwissenschaftliche Veranstaltungen für angehende Lehrkräfte beitragen?**

Die Fähigkeit zu einer lernförderlichen Rekonstruktion mathematischer Schulinhalte entwickelt sich nicht alleine und kann auch nicht lapidar unter dem Stichwort „Lehrkunst“ abgehandelt werden. Aufgabe fachwissenschaftlicher Veranstaltungen für Lehrkräfte sollte es nach diesen Ausführungen deshalb sein, substantielle Beiträge zur Kompetenzentwicklung im Bereich

der fachlichen *Rekonstruktion* von Schulinhalten zu leisten. An geeigneten Beispielen sollte thematisch werden, welche Überlegungen im Zuge der Operationalisierung von Lerninhalten aus einer fachlichen Perspektive anzustellen sind und wie deren Resultate aussehen können. Ziel muss es sein, dass Studierende nach Beendigung des Studiums zumindest ansatzweise in der Lage sind, die im Abschnitt 4 formulierte *Rekonstruktionsaufgabe* zu lösen. Bzgl. des Lerninhalts Quersummenregel könnte sich eine erste Lernaufgabe dann beispielsweise etwa so anhören:

*Ein großer Haufen Bonbons 2341 (3444, 235678, 902232, 123456789, ...) soll gerecht auf neun Schülerinnen und Schüler verteilt werden. Finde ohne Verwendung der schriftlichen Division heraus, ob alle Schülerinnen und Schüler gleich viele Bonbons bekommen.*

Aus diesem exemplarischen Beispiel ergibt sich eine wichtige Forschungs- und Entwicklungsaufgabe der Mathematikdidaktik: Wie können Studierende (und Lehrkräfte) dabei unterstützt werden, die fachliche *Rekonstruktion* mathematischer Schulinhalte in der Praxis zu leisten? Wie können die zentralen Verstehensinhalte, die inner- oder außermathematische Nützlichkeit, lernförderliche Kontexte und geeignete Lernschritte bzgl. eines mathematischen Lerninhalts ermittelt werden?

## Literatur

- Aebli, H. (1980/81). *Denken: Das Ordnen des Tuns*. 2. Band. Stuttgart: Klett-Cotta
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.
- Jaschke, T. (2018). Entwicklung eines Planungsmodells für die Unterrichtsplanung von Erarbeitungsphasen/Manuskript in Vorbereitung.
- Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*. Bd. 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Prediger, S., Komorek, M., Fischer, A., Hinz, R., Hußmann, S., Moschner, B., Ralle, B. & Thiele, J. (2013). Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme*. (S. 9-24). Münster: Waxmann.
- Reusser, K. & Pauli, C. (2013). Verständnisorientierung in Mathematikstunden erfassen. Ergebnisse eines methodenintegrativen Ansatzes. *Zeitschrift für Pädagogik* 59 (2013) 3, 308-335.
- Terhart, E. (2000). Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission. Weinheim, Basel.
- Wertheimer, M. (1945/1964). *Produktives Denken*. Frankfurt am Main: Kramer.