Rainer KAENDERS, Bonn

Der Graph – verwandelt kehrt er als derselbe wieder

Eadem mutata resurgo ziert den mit einer (versehentlich archimedischen statt logarithmischen) Spirale geschmückten Grabstein Jakob Bernoullis (1655–1705) im Baseler Münster: *Verwandelt kehre ich als dieselbe wieder*.

Die hier gemeinte Symmetrie, bei der die Drehung der logarithmischen Spirale dieselbe Wirkung hat, wie eine zentrische Streckung, kennt Analoga bei Funktionen der Schulmathematik. Mithilfe dieser Symmetrien können wir etwa Integralrechnung ohne den Hauptsatz betreiben (Kaenders und Kirfel 2017). Die betrachteten Symmetrieeigenschaften von Funktionen geben Anlass zu Funktionalgleichungen, die von Augustin Louis Cauchy (1821, Kapitel 5, S. 121) betrachtet wurden.

Schüler kennen Gleichungen, deren Lösungen Zahlen sind. Funktionalgleichungen, deren Lösungen Funktionen sind, werden in der Schule nur im Rahmen von Steckbriefaufgaben behandelt. Differentialgleichungen sind der Kompetenzorientierung zum Opfer gefallen. Zu einer Funktionalgleichung gehört auch immer der Bereich, in dem wir die Lösungen suchen. Wir betrachten hier drei Funktionenklassen: differenzierbare, stetige und beliebige Funktionen. Bei beliebigen Funktionen stoßen wir in faszinierende von Georg Hamel (1905) erschlossene Welten vor.

Am Ende betrachten wir die *Funktionenwippe* und bestimmen alle Funktionen, deren Graphen auf der Wippe nur verschoben werden.

Der Beitrag ist ein Vorschlag für eine Propädeutik zu Funktionalgleichungen und speziell zu Differentialgleichungen. Letztere bilden wohl das wichtigste Werkzeug zur Modellierung mit Mathematik.

1. Eine Beobachtung an Geraden

Die Graphen linearer Funktionen der Form $g(x) = mx + b$ haben eine besondere Eigenschaft, die so offensichtlich ist, dass sie übersehen werden kann: Wenn wir den Graphen auf irgendeine Weise horizontal verschieben, gibt es immer eine vertikale Verschiebung des Graphen, deren Bild mit dem der horizontalen Verschiebung übereinstimmt; doch ist dies keine punktweise Verschiebung.

Differenzierbare Funktionen

Gesucht ist also eine Funktion f, so dass es für jedes a ein c gibt mit: $f(x + a) = f(x) + c$. Suchen wir ein solches f unter den *differenzierbaren* Funktionen, sind wir schnell fertig, da dann $f'(x + a) = f'(x)$ sein muss.

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Also ist die Funktion f konstant und mit Mittelwertsatz! folgt, dass f von der Form $f(x) = mx + b$ sein muss.

Stetige Funktionen

Suchen wir nun eine solche Funktion f, so dass es für jedes a ein c gibt mit: $f(x+a) = f(x) + c$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f(0) = 0$. Dann ist $f(x+a) = f(x) + f(a)$ für alle Zahlen x und a. Wir suchen also eigentlich additive Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Schauen wir nun speziell auf die *stetigen* Funktionen, legt die Additivität die Werte von f auf $\mathbb{Q}$ fest. Denn für jedes gilt x gilt: $f(-x) + f(x) = f(0)$. Also ist $f(-x) = -f(x)$ und für rationales $x = \frac{p}{q}$ folgt aus $p \cdot 1 = q \cdot x$, dass $p \cdot f(1) = f(p \cdot 1) = f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$. Also $f(x) = xf(1)$.

Allgemeine Funktionen

Bei der Betrachtung allgemeiner Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x+a) = f(x) + f(a)$ für alle Zahlen x und a führt uns zu einem spannenden Phänomen, das zu Beginn des 20. Jahrhunderts von Georg Hamel (1905) entdeckt wurde: die Existenz additiver aber nicht linearer Funktionen.

Betrachte die reellen Zahlen in $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Dieser Vektorraum hat aufgrund des Zornschen Lemmas (bzw. Auswahlaxiom) eine Basis $\mathcal{B}$, die man nach Georg Hamel (1877–1954) auch *Hamel-Basis* nennt:

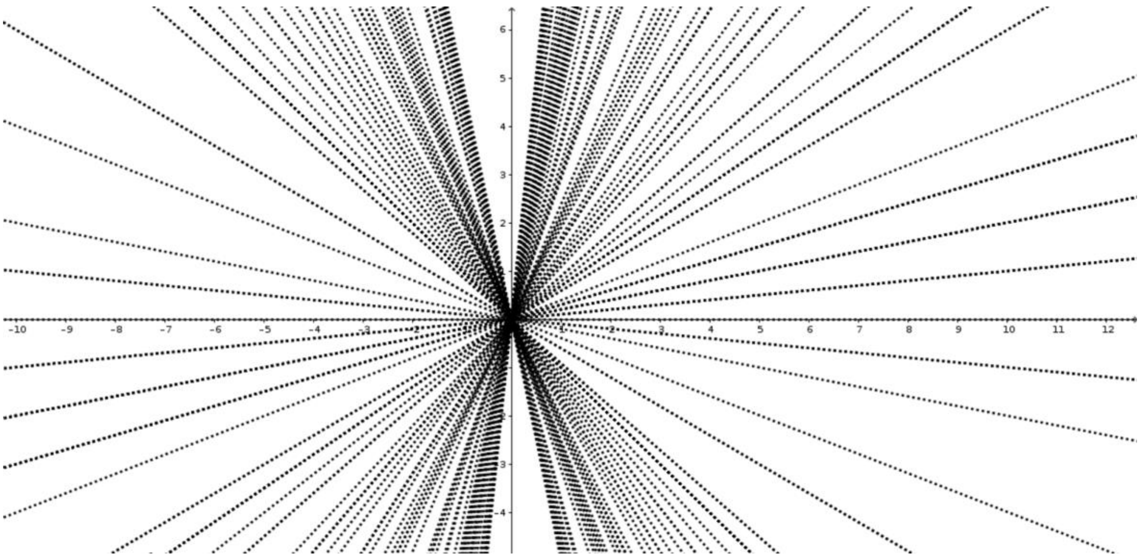

Abb. 1: Eine additive, nicht-lineare Funktion (die gar nicht abbildbar ist)

Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$ mit $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \mathcal{B}$ und $r_i(x) \in \mathbb{R}$. Jede Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die wir auf den Basiselementen festlegen, ist additiv (Neunhäuserer 2015, S. 12 ff). Eine additive, aber nicht notwendig lineare Funktion, nennen wir hier eine *Hamelfunktion*.

2. Von der Symmetrie zu Cauchys Funktionalgleichungen

Den Graphen von Funktionen f können wir horizontal und vertikal verschieben und dies jeweils mit Streckungen in horizontaler oder vertikaler Richtung kombinieren. Übersetzt in algebraische Sprache erhalten wir die vier Cauchyschen Funktionalgleichungen (Cauchy 1821, Kapitel 5, S. 121):

a) Gesucht sind $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$.
b) Gesucht sind $\phi: \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.
c) Gesucht sind $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ mit $\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.
d) Gesucht sind $\phi: \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x \cdot y) = \phi(x) + \phi(y)$.

In der Menge der differenzierbaren Funktionen sind die vier Gleichungen unter Verwendung des Mittelwertsatzes leicht zu lösen. Auch wenn man den Geltungsbereich der Gleichungen auf stetige Funktionen erweitert, finden wir dieselben Lösungen: lineare Funktionen in a), Potenzfunktionen in b), Exponentialfunktionen in c) und Logarithmusfunktionen in d). Bei beliebigen Funktionen kommen die Hamelfunktionen auf offensichtliche Weise mit ins Spiel. Nur auf der Grundlage der Cauchyschen Funktionalgleichungen können die Flächen unter den Graphen entsprechender Funktionen ohne Differentialrechnung berechnet werden (Kaenders & Kirfel 2017).

3. Funktionenwippe

Die Funktionenwippe ist eine schöne Spielerei zur Propädeutik von Funktionalgleichungen. Wir stellen uns den Graphen der Funktion auf einer Wippe in einem kartesischen Koordinatensystem vor, die aus einer Geraden durch den Ursprung mit variabler Steigung m besteht, d.h. dass sich die Gerade um den Ursprung dreht und die Funktionswerte hoch und runter schiebt. Über der Stelle x finden wir den *gewippten* Funktionswert $g(x) = f(x) + mx$. Welche Funktionen haben die Eigenschaft, dass ihr Graph in jeder Stellung den verschobenen Ausgangsgraphen liefert? In symbolischer Notation fordern wir, dass für jedes m ein a und ein b existiert mit der Eigenschaft: $f(x) + mx = f(x+a) - b$, oder $f(x+a) - f(x) = mx + b$. O.B.d.A. können wir wieder annehmen: $f(0) = 0$ und in diesem Fall ist dann auch $b = f(0)$. Der Graph von f wird so um $\big(-a, -f(a)\big)$ verschoben. In dieser Situation bestimmen wir alle solchen Funktionen. Der Satz beruht auf zwei Lemmata und einer leicht zu beweisende Proposition.

Lemma 1*: Zu m seien a_1 und a_2 so gewählt, dass $\forall x$: $f(x+a_1) - f(x) = mx + f(a_1)$ und $f(x+a_2) - f(x) = mx + f(a_2)$. Dann ist $a_1 = a_2$.*

Beweis: Setzen wir $a_1$bzw. a_2 für x ein, erhalten wir $f(a_1+a_2) = f(a_1) + ma_1 + f(a_2) = f(a_2+a_1) = f(a_2) + ma_2 + f(a_1)$. Also: $a_1 = a_2$. □

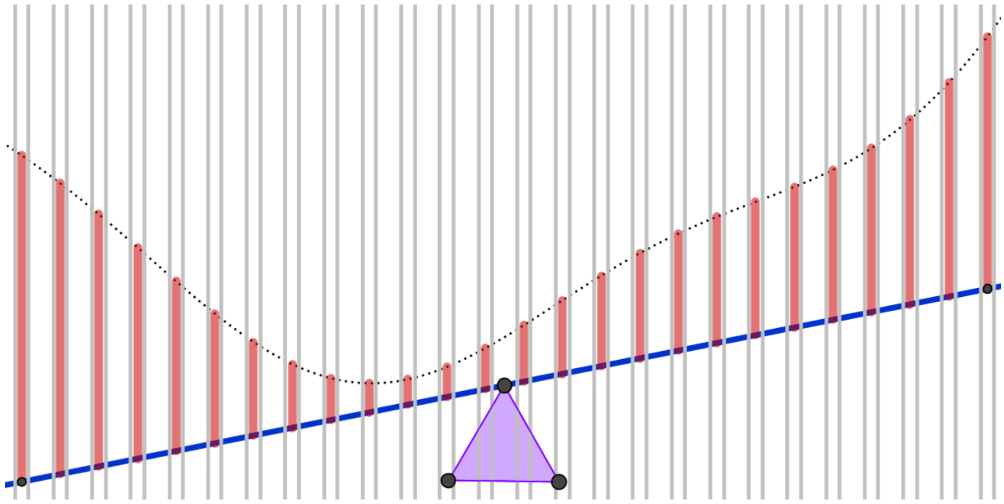

Abb. 2: Funktionenwippe – die Stäbe werden vertikal verschoben.

***Lemma 2**: Für alle reellen Zahlen t gilt, dass für alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt:* $f(x + ta) - f(x) = tmx + f(ta)$.

Beweis: Sei a' so gewählt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + a') - f(x) = tm\,x + f(a')$. Wir verfahren wieder wie vorher: $f(ta + a') = f(ta) + m\,ta + f(a') = f(a' + ta) = f(a') + ma' + f(ta)$. Also: $a' = ta$. □

***Proposition**: Zu $m \neq 0$, $a \neq 0$ gibt es genau eine quadratische Funktion q, bei der für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $q(x + a) - q(x) = mx + q(a)$.* □

Nach Lemma 2 gilt dann auch $q(x + ta) - q(x) = tm\,x + q(ta)$ für alle t. Setze $h(x) = f(x) - q(x)$. Also ist $h(x + ta) - h(x) = f(x + ta) - f(x) + q(x + ta) - q(x) = f(ta) - q(ta) = h(ta)$. Damit ist h eine Hamelfunktion. Somit haben wir bewiesen:

***Satz**: Sei f eine wippbare Funktion, d.h. für jedes m gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) + mx = f(x + a) - b$. Dann ist $f = q + h$, wobei q eine quadratische und h eine Hamelfunktion ist.*

Bemerkung: Falls f zudem stetig ist, muss f eine quadratische Funktion sein. Für differenzierbare Funktionen ist das Problem bedeutend einfacher.

Literatur

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. Chez Debure frères (Reprint Cambridge University Press, 2009).

Hamel, G. (1905). Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Mathematische Annalen* 60, 459–462.

Kaenders, R. & Kirfel, C. (2017). *Flächenbestimmung bei Basisfunktionen der Schule mit Elementargeometrie.* Math. Semesterberichte, 64(2):199–220.

Neunhäuserer, J. (2015). *Schöne Sätze der Mathematik. Ein Überblick mit kurzen Beweisen*. Heidelberg: Springer Spektrum.