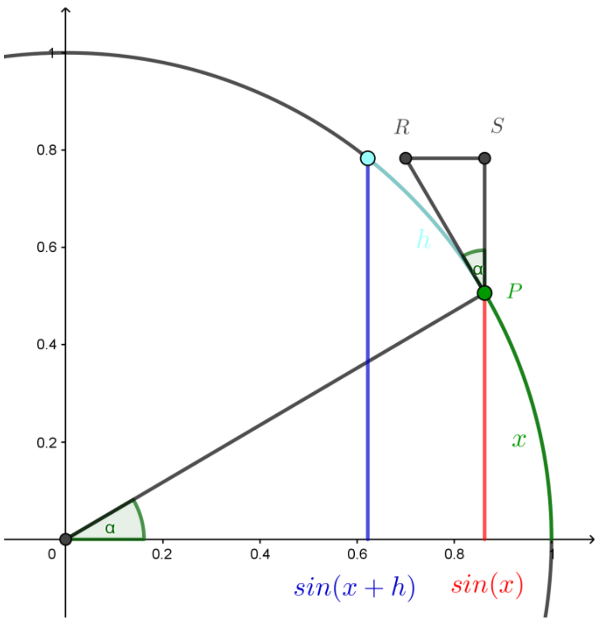
Valentin KATTER, Bielefeld

Die Ableitung der Sinusfunktion – prozedurale und konzeptionelle Aspekte trigonometrischer Wissenselemente

In diesem Artikel werden einige Ergebnisse und Ausblicke einer Seminareinheit zum Thema „Ableitung der Sinusfunktion" vorgestellt, welche mit 17 Masterstudenten des gymnasialen Lehramts im Rahmen der Veranstaltung „Didaktik der Analysis" an der Universität Bielefeld durchgeführt wurde. Dabei werden Vermutungen über die Wissensstruktur der Lernenden angestellt. Als theoretischer Rahmen dienen hierzu die Trennung von prozeduralem und konzeptionellem Wissen und die Unterscheidung von vier Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus wie sie von Salle und Frohn (2017) vorgenommen wurde.

Die Ableitung der Sinusfunktion – stoffdidaktische Überlegungen



Im Mittelpunkt der stoffdidaktischen Analyse trigonometrischer Wissenselemente steht in diesem Beitrag eine Veranschaulichung zur Ableitung der Sinusfunktion, wie sie bei Kirsch (1979) zu finden sind. Die nebenstehende Abbildung ist angelehnt an das Bild, welches man, versehen mit einer kurzen Erklärung, in der Arbeit von Kirsch (1979) findet. Eine intensive Auseinandersetzung mit diesem Bild hält für den geneigten Leser und Mathematiker eine möglicherweise überraschende geometrische Verdeutlichung der Ableitung der Sinusfunktion parat. Zugänglich ist diese Erkenntnis jedoch nur, wenn man über tragfähige Grundvorstellungen mathematischer Begriffe verfügt und diese schnell abrufen kann. Dabei können sechs grundlegende Vorstellungen ausfindig machen werden, die besonders in diesem Beispiel wichtig erscheinen. Der Lernende muss 1.) die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten auffassen, 2.) über die Vorstellung der Tangente als lineare Approximation verfügen, 3.) den Sinus als Parametrisierung der Kreisbewegung verstehen, 4.) den Sinus als Seitenverhältnis in rechtwinkligen Dreiecken deuten, 5.) gleichbleibende Verhältnisse als Merkmal für Ähnlichkeit verstehen und 6.) ein angemessenes Verständnis zum Bogenmaß und Winkelmaß aufbringen.

Aufgabenstellung und Test

In einem ersten Versuch bearbeiteten 17 Master-Lehramtsstudierende einen eigens für dieses Beispiel entwickelten Arbeitsbogen, anhand dessen die Lernenden die einzelnen Argumentationsschritte nachvollziehen und in eigenen Worten formulieren sollten. Eine Begutachtung der Lösungen der Studierenden zeigte, dass sie weitgehend in der Lage waren alle Schritte des Arbeitsblattes zu rekonstruieren. Umso überraschender war der Ausgang eines Tests, der den Studenten eingangs zur Wissensstandermittlung vorgelegt wurde. In diesem Test wurden 5 Fragen gestellt, die einen groben qualitativen Überblick über das vorhandene Verständnis der Studierenden zum Themenbereich trigonometrischen Funktionen geben sollte. Die Fragen dieses Tests wurden von Weber (2005) übernommen und lauteten:

1. Was verstehst du unter dem Begriff „Sinus“?
2. Was sagt dir der Wert $\boldsymbol{cos(\pi\ )}$?
3. Schätze, wie groß $\boldsymbol{sin(170}°)$ ungefähr sein müsste?
4. Für welche Werte ist die Funktion $\boldsymbol{sin(x)}$ positiv, für welche ist sie negativ? Warum?
5. Für welche Werte ist $\boldsymbol{sin(x)}$ steigend, für welche ist sie fallend? Warum?

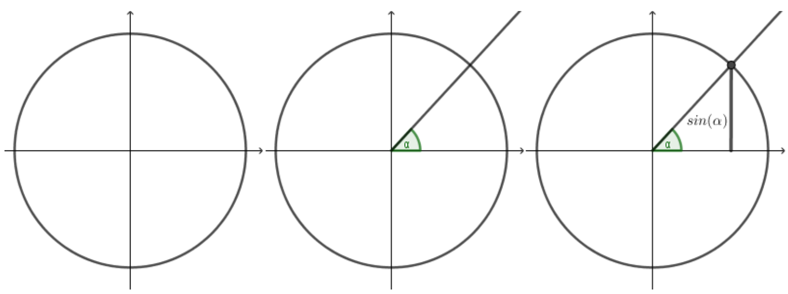
Besonders die Antworten zu Frage 3 waren überraschend. Es gab insgesamt nur 3 als korrekt anzusehende Antworten, 3 Studenten gaben keine Antwort und 11 Studenten gaben eine falsche Antwort. Unter diesen falschen Antworten, fand sich beispielsweise die Aussage *„sin(170°)=1,2 (meine Schätzung)“*, die auf ein grundlegendes Missverständnis der Sinusfunktion, sowie fehlende Grundvorstellungen schließen lässt. Außerdem fanden sich Antworten der Art *„*≈ 0.45 *weil 170 von 360 weniger als die Hälfte“* oder *„sin(170°) muss etwas kleiner sein als* π*“,* die auf eine Fehlvorstellung der Studenten zur Sinusfunktion schließen lassen könnten, bei der die Funktionswerte der Sinusfunktion den Umfang eines Kreises ausgeben. Nachdem der Test ausgewertet wurde, stellte sich die natürliche Frage, wie es zu so einer großen Diskrepanz zwischen dem schlechten Abschneiden beim Vortest und der korrekten Bearbeitung des Arbeitsblattes kommen konnte. Schließlich würde man doch davon ausgehen, dass Studierende, die in der Lage sind komplexe Beweisschritte nachzuvollziehen, auch gleichzeitig in der Lage sein sollten, scheinbar einfache Schätzaufgaben zu ähnlichen Wissensbereichen beantworten zu können.

Prozedurale und konzeptionelle Aspekte trigonometrischen Wissens

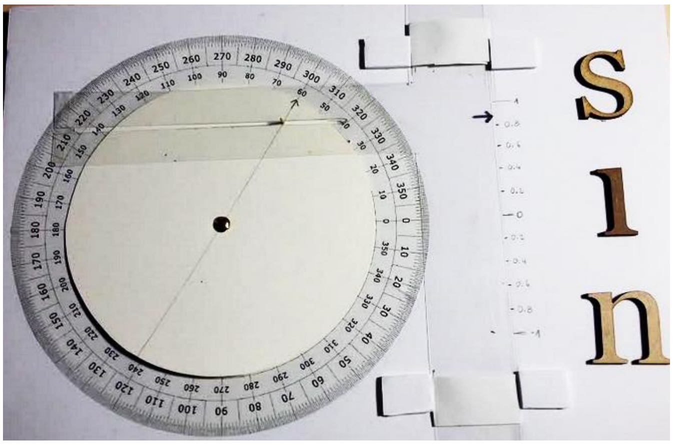
Einen ersten Hinweis zur Erklärung dieses Phänomens findet man in einem Artikel von Gray und Tall (1994), in dem es heißt: *„We have evidence that the conception of a trigonometric ratio only as a process of calculation (opposite over hypotenuse) and not a flexible procept causes difficulties in trigonometry"*. Dieser Artikel bildet den ersten Anhaltspunkt und gleichzeitig auch den Grundstein für einen theoretischen Rahmen, auf dessen Grundlage eine Analyse trigonometrischer Wissenselemente stattfinden kann. In diesem Rahmen wird es möglich verschiedene mathematische Wissenselemente auf prozedurale und konzeptionelle Aspekte hin zu untersuchen und dadurch zu kategorisieren. Eine inhaltlich sehr vereinfachte Darstellung dieser Aspekte beschreibt prozedurales Wissen, als „Wissen, dass…" und konzeptionelles Wissen als „Wissen, wie…". Eine trennscharfe Einteilung in diese Kategorien ist jedoch nicht immer möglich. Gray und Tall (1994) gehen sogar so weit, eine neue Wissenskategorie zu konstituieren, welche als prozeptuelles Wissen bezeichnet wird und eine Art Mischform des prozeduralen und konzeptionellen Wissens darstellt. In Tall et al. (1999) nehmen die Autoren eine weitere begriffliche Differenzierung vor. Ein Prozept entsteht demzufolge aus einer Prozedur, die durch vielfaches Anwenden verinnerlicht wurde, um somit zu einem Prozess zu werden, bis es schließlich durch einen Abstraktionsprozess (*Encapsulation*) selber zum Objekt der Betrachtung wird, mit dem auf einer neuen Ebene weiter gearbeitet werden kann.

Entwicklung eines Prozepts

Ein mögliches Ziel dieser Kategorisierung von Wissenstypen kann es sein, mathematische Inhalte so aufzubereiten, dass dadurch die Konstruktion prozeptuellen Wissens bei Lernenden gefördert wird. Ein Beispiel zur möglichen Heranbildung eines solchen flexiblen Prozepts ist die Bestimmung von Sinuswerten zu gegebenen Winkelgrößen. Angenommen, zu einem gegebenen Winkel α soll der Wert $sin(\alpha)$ gefunden werden. Die ursprüngliche Prozedur, die Lernende verinnerlichen sollen, kann wie folgt aussehen: Lernende müssen zunächst einen beliebigen Kreis in ein Koordinatensystem zeichnen und als nächstes von der x-Achse einen Winkel mit der Größe α aufschlagen. Die y-Koordinate des Schnittpunkts von dem Schenkel des Winkels und dem Kreis,



im Verhältnis zum Radius des Kreises, liefert dann den gesuchten Wert $sin(\alpha)$. Nach mehrmaligem Anwenden dieser Prozedur sind die Lernenden möglicherweise bereits in der Lage den prozeduralen Charakter dieser Vorgehensweise zu erkennen und den Sinus als Parametrisierung der Kreisbe-



wegung aufzufassen. Der Schritt zum Prozept kann dann durch die Erstellung eines Sinusmessgerätes erfolgen, wie es Kirsch (1979) in seinem Artikel vorschlägt. Die Erstellung eines solchen Geräts dient als Verallgemeinerung des Prozesses, in der alle Schritte der Prozedur vereint und in eine handliche Form gebracht werden.

Literatur

Gray E., Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A "Proceptual" view of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 116-140

Kirsch, A. (1979). Anschauung und Strenge bei der Behandlung der Sinusfunktion und ihrer Ableitung. *Der Mathematikunterricht, 25*(3), 51-71

Salle A., Frohn D (2017). Grundvorstellung zu Sinus und Kosinus. *Mathematik Lehren, 204*, S.8-12

Tall D. et al (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of mathematical Behavior, 18*, 223-241

Weber K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91-112