

Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Die vektorielle Analytische Geometrie ist eines der drei großen mathematischen Sachgebiete der gymnasialen Oberstufe. Ein zentrales Ziel der Analytischen Geometrie ist die Beschreibung und Untersuchung geometrischer Sachverhalte mit Vektoren. Ein Teilziel besteht in der Aufstellung und Anwendung einer Vektorgleichung, wie beispielsweise

$$\overrightarrow{0X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Im Rahmen einer qualitativen Studie wird untersucht, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler (im Folgenden wird als Abkürzung SuS verwendet) mit einer Vektorgleichung (wie beispielsweise (*)) als Geradenbeschreibung verbinden.

Der Beitrag konzentriert sich auf die Darlegung derjenigen Untersuchungsergebnisse, die im Rahmen der Auswertung für eine Falltypisierung weiterverarbeitet werden konnten. Die wichtigsten Eckdaten zur Durchführung und Auswertung der Interviews sind in den beiden folgenden Abschnitten kurz zusammengestellt.

Eckdaten zum Untersuchungsdesign und der Stichprobe

Insgesamt wurden 17 SuS aus Mathematikleistungskursen der Jgst. 12 von 4 verschiedenen Gymnasien in Köln interviewt. Die Befragungen wurden einzeln nach einem vorgegebenen Frageleitfaden durchgeführt und sind methodisch als problemorientierte Interviews angelegt (Vgl. [Witzel, 2000]). Dementsprechend sind die Fragen offen formuliert und besitzen einen Aufforderungscharakter, so dass die Befragten Narrationen zu den einzelnen Gegenständen generieren konnten. Die Lernenden wurden zu denjenigen Vorstellungen befragt, die sie mit einem Vektor, einer Geraden, den Komponenten einer vektoriellen Geradenbeschreibung und zur Vorstellung, die sie mit einer Vektorgleichung als Ganzes verbinden.

Die SuS konnten im Rahmen der Befragung Grafiken anfertigen, um ihre Ausführungen genauer erklären zu können. Daher wurden die Interviews mit einer Videokamera anonymisiert aufgezeichnet. Anschließend erfolgte die Transkribierung der Interviews und ggf. der angefertigten Grafiken.

Auswertungsmethode der Interviews

Die verschriftlichen Interviews wurden mit Hilfe der typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet (Vgl. [Mayring, 2008], [Kuckartz, 2016]). Zunächst wurde das Datenmaterial nach den Vorgaben einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse deduktiv-induktiv kodiert. D.h. es erfolgte eine grobe Kodierung anhand der durch die Fragen vorgegebenen Hauptkategorien. Diese wurden anschließend am Material weiterentwickelt und ausdifferenziert. In der Ausdifferenzierung ist neben dem Textmaterial auch das von den Befragten angefertigte Bildmaterial miteinbezogen worden.

Die generierten Codes entsprechen inhaltlichen Vorstellungen bzw. Teilvorstellungen zu Vektoren, Geraden und Komponenten einer Vektorgleichung, wie der Variablen t , mit der der so genannte Richtungsvektor vervielfacht wird. Jeder individuelle Fall kann im Hinblick auf das Untersuchungsziel auf eine Kombination unterschiedlicher Codes inhaltlich reduziert werden. Darüber hinaus zeigt jede als „Code-Kombination“ durchgeführte Fallcharakterisierung, welche Vorstellung der jeweilige Befragte inhaltlich mit einer Vektorgleichung verbindet.

Bei der Auswertung zeigte sich, dass die einzelnen Fälle über die Vektorvorstellungen und die Vorstellungen zu Variablen sinnvoll gruppiert werden können. Folglich bilden die Codes zu Vektor- und Variablenvorstellungen den Merkmalraum zur Typisierung. Für die Vektoren lieferte die Untersuchung die Codes: „Bewegung“, „Tupel“, „Pfeildarstellung“, „Pfeil“, „gerichtete Strecke“ und „verschiebbar“. Die Codes zu den Vorstellungen, die mit Variablen verbunden werden, können durch die von Malle formulierten Variablenaspekte zu Funktionsvariablen beschrieben werden (Vgl. [Malle, 1993]): „Simultanaspekt“ und „Einzelzahlaspekt“.

Ergebnisse der Fallkontrastierung

Die oben angegebenen Merkmale ermöglichten die Bildung drei zentraler Typen. Die Vorstellungen, die jeder einzelne Typus idealisiert mit einer vektorriellen Geradenbeschreibung verbindet, werden im Folgenden zusammengefasst aufgelistet und in Abbildung 1 visualisiert.

- (1) Typ „simultane Bewegung“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ eine Bewegung in einem Koordinatensystem vor, die durch ein Zahlentupel beschrieben wird und mit Hilfe eines Pfeils grafisch dargestellt werden kann. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ simultan alle Bewegungen, die von einem Punkt auf einer

Geraden zu allen anderen Punkten auf der Geraden führen, da für die Variable t alle reellen Zahlen eingesetzt werden können.

- (2) Typ „Pfeilverlängerung“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ ein Zahlentupel vor, das einen Pfeil in einem Koordinatensystem beschreibt. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ einen festen Punkt auf einer Geraden, von dem er durch die t -fache Verlängerung des Richtungsvektors zu einem weiteren Punkt auf der Geraden gelangt.
- (3) Typ „Variable als Erkennungsmerkmal“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ einen Pfeil oder eine Strecke vor, die gerichtet sein kann. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ einen Pfeil, an den der Richtungsvektor angesetzt wird. Den Richtungsvektor erkennt man an der Variablen t . Die Gerade entsteht, indem der Richtungsvektor mehrfach nacheinander gelegt wird bzw. verlängert oder verkürzt wird.

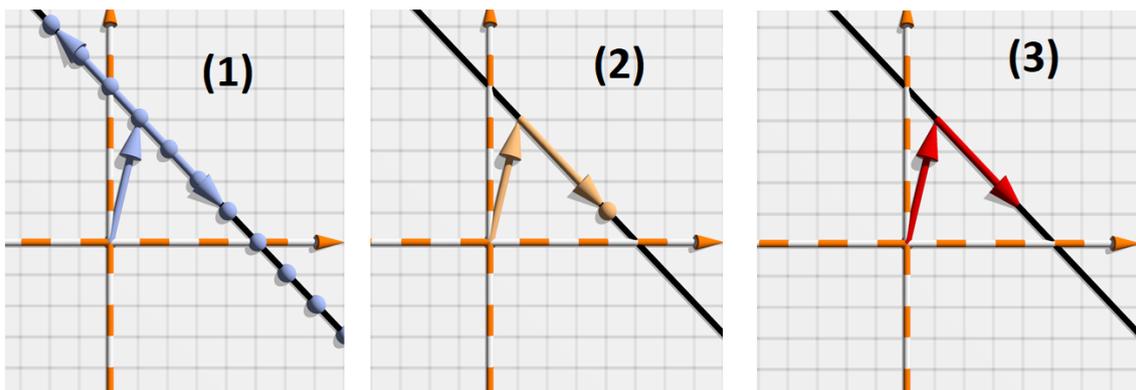


Abb. 1: Visualisierung der Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Abschließend können nicht alle 17 Fälle einem der drei Idealtypen zugeordnet werden. Es gibt vier Fälle, die sowohl Merkmale von Typ (2) als auch von Typ (3) aufweisen, jedoch von keinem dieser beiden Idealtypen alle Merkmale aufweisen. Sie stellen folglich eine Mischform dar. Bei einer erneuten Analyse derjenigen Merkmale, die die betroffenen Fälle aufweisen, konnte beobachtet werden, dass diese vier Befragten die einzigen Fälle sind, die das Merkmal „verschiebbar“ in ihrer Vektorvorstellung aufweisen. Aus fachlicher Sicht bedeutet dieser Aspekt, dass sie in irgendeiner Form ansatzweise mit einem Vektor die Idee einer „Pfeilklassse“ verbinden.

Aus den gewonnenen Daten lassen sich keine kausalen Zusammenhänge erkennen, die erklären inwieweit das Merkmal „verschiebbar“ die nicht eindeutige Zuordnung zu einem der drei Idealtypen bedingt. Darüber hinaus stellt „verschiebbar“ eine besondere gemeinsame Ausprägung dieser Fälle

dar, ermöglicht jedoch keine Gruppierung dieser Fälle zu einem eigenständigen Typus, der sich von den anderen inhaltlich unterscheidet.

Fazit

Die drei gebildeten Idealtypen repräsentieren Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen, deren Qualität unterschiedlich bewertet werden kann. Eine mögliche Qualitätseinordnung kann anhand der Frage vorgenommen werden, inwieweit die Vorstellung, die mit einer vektoriellen Geradenbeschreibung verbunden wird, einen Aufbau von adäquaten Vorstellungen zu Geraden unterstützt.

Der Typ „simultane Bewegung“ stellt sich eine Gerade als ein Objekt vor, welches durch gleichgerichtete Punktbewegungen beschrieben wird, da jeder Punkt auf der Geraden durch Verschiebung eines festgewählten Punktes entsteht. Dieser Aspekt kann sowohl den grundsätzlichen Aufbau einer Vorstellung zu Geraden als auch den Aufbau von dynamischen Interpretationen zu Geraden ermöglichen. Typ „Pfeilverlängerung“ unterscheidet sich von Typ „simultane Bewegung“ durch die beiden zentralen Aspekte, dass Vektoren als Pfeile gedeutet werden und die Vektorgleichung einen einzelnen Punkt beschreibt, der Endpunkt eines an einen festgewählten Punkt angelegten Pfeil ist. Die Trennung zwischen algebraischer Beschreibung und geometrischer Deutung ist nicht mehr klar erkennbar. Dieser Aspekt trifft auch auf den Typ „Erkennungsmerkmal“ zu. Für diesen Typus spielt die Variable t bei der Geradenerzeugung keine Rolle. Die Gerade wird durch den Stützvektor und den Richtungsvektor festgelegt.

Abschließend kann festgehalten werden, dass alle drei Typen mit Vektoren eine Vorstellung zu einer Geraden aufbauen können. Die Deutung der Vektorgleichung als Beschreibungswerkzeug wird unterschiedlich genutzt und weist unterschiedliche Qualitäten auf.

Literatur

- Henn, H.-W., Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim, Basel: Beltz Juventa.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim, Basel: Beltz.
- Witzel, A. (2000). Das problemzentrierte Interview [25 Absätze]. *Forum: Qualitative Sozialforschung*, 1(1), Art. 22, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0001228>, zuletzt aufgerufen am 13.03.2018.