

Christoph KIRFEL, Bergen (Norwegen)

Die logarithmische Spirale – Ein dankbares Studienobjekt

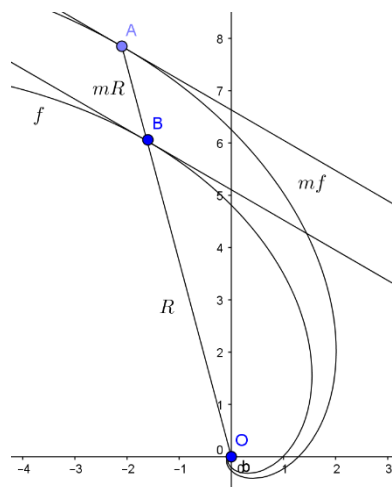
Thomas Harriot beschreibt die logarithmische Spirale erstmals 1590 (siehe Stillwell 1989, S. 336 - 339). Inspiriert von Navigationslinien auf Mercatorkarten, definiert er die logarithmische Spirale als eine Kurve, bei der – in moderner Terminologie – Radiusvektor und Tangente einen konstanten Winkel bilden. Daraus leitet er bereits Formeln für den Flächeninhalt und die Bogenlänge her.

Viele Größen der logarithmischen Spirale, wie die Tangentensteigung, die Bogenlänge, die Fläche und die Krümmung lassen sich leicht aus den besonderen Symmetrieeigenschaften der logarithmischen Spirale ermitteln. Andere Kurven mit ähnlichen Symmetrieeigenschaften können ähnlich behandelt werden, und ähnliche Ergebnisse, wie die unten dargestellten, können dort gezeigt werden.

Wir benutzen ab jetzt die Definition der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten $r = e^{k\theta}$, wobei k eine reelle Konstante ist. Diese Definition ist äquivalent zu der von Harriot. Jacob Bernoulli, der ausführlich über die logarithmische Spirale arbeitete und diese wegen ihrer erstaunlichen Eigenschaften *spira mirabilis* nannte, bemerkte, dass die logarithmische Spirale folgende beeindruckende Eigenschaft hat. Führt man erst eine zentrische Streckung der gesamten Ebene mitsamt der Spirale durch, so erhält man eine neue Kurve. Aus dieser kann man durch eine geschickte Rückdrehung die ursprüngliche Spirale wiedererhalten. Bei der Streckung (Streckfaktor m) erhält man nämlich $r = me^{k\theta} = e^{k(\theta + \frac{\ln m}{k})} = e^{k(\theta + \alpha)}$, und wir sehen, dass wir die alte Spirale erhalten, wobei der Winkel θ durch $\theta + \alpha$ ersetzt ist, was man als Resultat einer Drehung um den Winkel α deuten kann. Diesen Sachverhalt wollen wir nun ausnutzen, um eine Vielzahl von Eigenschaften der logarithmischen Spirale zu zeigen.

Die Tangentensteigung

Wir betrachten eine Tangente an die ursprüngliche Spirale im Punkt B . Bei der zentrischen Streckung werden Winkel erhalten, sodass der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente bei der neuen und der alten Kurve gleich sind. Die anschließende Rückdrehung ändert den Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente

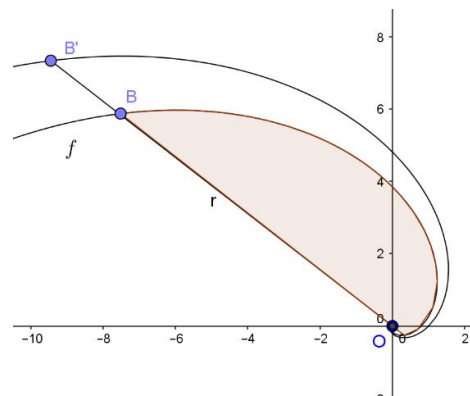


auch nicht, sodass wir gleich schließen können, dass der Winkel zwischen Radiusvektor und Tangente entlang der gesamten Spirale konstant ist.

Die Fläche zwischen einem Radiusvektor und der logarithmischen Spirale und die Bogenlänge

Nun betrachten wir die Fläche zwischen einem Radiusvektor und der logarithmischen Spirale. Bei der zentrischen Streckung vergrößert sich diese Fläche auf das m^2 -fache der ursprüngliche Fläche, wobei m der Streckfaktor ist. Bei der anschließenden Rückdrehung ändert sich die Fläche natürlich nicht. Deshalb bekommen wir eine quadratische Formel $F = Cr^2$ für die Fläche F , wobei die Konstante C den Flächeninhalt bei $r = 1$ angibt.

Erstaunlicherweise lässt sich die gleiche Argumentation bei der Bogenlänge der logarithmischen Spirale anwenden. Bei der zentrischen Streckung wächst die Bogenlänge auf das m -fache der ursprünglichen Bogenlänge an und bei der anschließenden Rückdrehung ändert sich die Länge nicht. Insgesamt bekommen wir also einen linearen Zusammenhang zwischen der Länge des Radiusvektors r und der Bogenlänge B der Spirale, $B = Dr$, wobei D die Länge des Bogens bei $r = 1$ ist.



Der Krümmungsradius

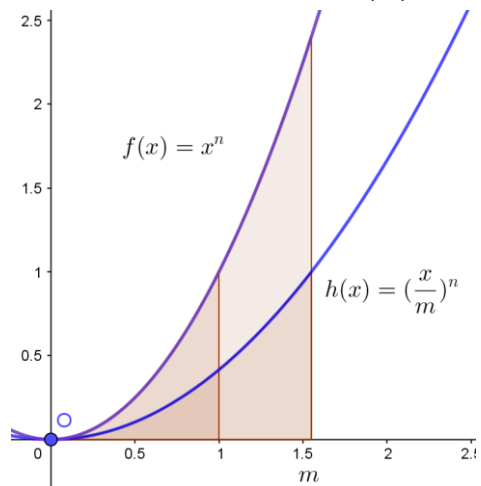
Ähnliche Argumente lassen sich ins Feld führen, wenn wir den Krümmungsradius studieren. Der Krümmungskreis in einem Punkt B der Spirale wird bei der Streckung in den Krümmungskreis der gestreckten Kurve im zugehörigen Punkt B' transformiert. Dieser wird nun mitsamt seinem Mittelpunkt und Radius zurückgedreht. Deshalb gilt auch hier ein linearer Zusammenhang für den Krümmungskreisradius C , nämlich $C = Kr$, wobei wieder K eine Konstante ist, die den Krümmungsradius bei $r = 1$ misst. Auch können wir schließen, dass der geometrische Ort der Krümmungskreismitelpunkte, also die Evolute der logarithmischen Spirale, selber eine logarithmischen Spirale sein muss.

Die kaustische Kurve (Hüllkurve der Reflektionsstrahlen an der Kurve, bei Strahlen vom Ursprung) einer logarithmischen Spirale ist wieder eine logarithmische Spirale. Dasselbe gilt für die Involute (Endpunkt eines auf der Kurve abgewickelten Fadens), die Inverse (Inversion am Einheitskreis), die

Pedalkurve (Ortslinie der Fußpunkte von Loten, die vom Ursprung auf Tangenten gefällt werden), die Radialkurve (Krümmungsradius parallel in den Ursprung verschoben) und die orthoptische Kurve der logarithmischen Spirale (Ortskurve der Schnittpunkte zweier Tangenten, die sich im rechten Winkel schneiden).

Mit Hilfe der besonderen Eigenschaft der logarithmischen Spirale, nämlich, dass die Kombination einer zentrischen Streckung und einer anschließenden Drehung uns zur ursprünglichen Kurve zurückbringt, lassen sich alle die obengenannten Eigenschaften der logarithmischen Spirale recht leicht zeigen. Die Frage ist nun, ob es eventuell andere Kurven gibt, bei denen ähnliche Symmetrieeigenschaften zu verzeichnen sind, die dann ebenfalls ausgenutzt werden können, um rasch Ergebnisse über Tangenten, Flächen und eventuell andere Größen Aussagen machen zu können.

Dies ist tatsächlich der Fall. Wir betrachten ein Flächenstück mit Inhalt F unter dem Graphen einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ über dem Intervall $[0,1]$. Wir strecken nun die gesamte Ebene mit dem Graphen der Funktion und dem Flächenstück entlang der x -Achse mit dem Faktor m . Dabei entsteht die Funktion $h(x) = \left(\frac{x}{m}\right)^n$ und der neue Flächeninhalt (jetzt über dem Intervall $[0, m]$) ist auf den Wert mF angestiegen. Unterwirft man nun die neue Funktion h einer zweiten Streckung, diesmal entlang der y -Achse mit dem Faktor m^n , so erhalten wir die Funktion $k(x) = m^n h(x) = m^n \left(\frac{x}{m}\right)^n = f(x)$ und wir kehren also – ähnlich wie bei der logarithmischen Spirale – zur ursprünglichen Funktion f zurück. Bei der zweiten Abbildung wächst der Flächeninhalt mit dem Faktor m^n an. Insgesamt ist der Inhalt des ursprünglichen Flächenstückes auf das m^{n+1} -fache angestiegen oder $\int_0^m x^n dx = m^{n+1} \int_0^1 x^n dx = m^{n+1} \cdot C$, wobei $C = \int_0^1 x^n dx$ eine Konstante ist, und wir haben die Integrationsformel für Potenzfunktionen entwickelt.



Bei Exponentialfunktionen muss man eine Verschiebung entlang der x -Achse mit einer Streckung entlang der y -Achse kombinieren um auf ähnlich leichte Art die Formel $\int_{-\infty}^m a^x dx = a^m \int_{-\infty}^0 a^x dx = C \cdot a^m$ zu erhalten. Man muss dann nur noch die Konstanten abklären. Logarithmusfunktion und die

trigonometrischen Funktionen lassen sich ebenfalls so behandeln, (siehe Kaenders & Kirfel 2017).

Für die Berechnung von Tangentensteigungen betrachtet man an Stelle des Flächenstückes ein Steigungsdreieck und führt dann wie oben die genannten Kombinationen von Transformationen (Streckung plus Streckung oder Verschiebung plus Streckung) aus. Dabei kann man dann auf völlig analoge Art Formeln für die Ableitung von Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, den Logarithmus und die trigonometrischen Funktionen entwickeln, (siehe Kaenders & Kirfel 2018).

Leider lassen sich die Bogenlänge, Krümmungsradius und die anderen speziellen Eigenschaften der logarithmischen Spirale nicht so einfach auf andere Kurven übertragen.

Resümee

In diesem Beitrag haben wir gezeigt, dass die erstaunlichen Eigenschaften der logarithmischen Spirale auf die besonderen Symmetrieeigenschaften der Kurve zurückgeführt werden können. Bei den bekannten Schulfunktionen (Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmus und den trigonometrischen Funktionen) gibt es ähnliche Symmetrieeigenschaften, die uns dabei helfen können, zumindest Flächeninhalt und Tangentensteigung ermitteln zu können. Dies gibt uns eine neue Sicht auf Integral- und Differentialrechnung und zeigt uns auch, warum die genannten Schulfunktionen eine zentrale Rolle in der Analysis einnehmen.

Literatur

- Kaenders, R. & Kirfel, C. (2017). *Flächenbestimmung bei Basisfunktionen der Schule mit Elementargeometrie*, Mathematische Semesterberichte, 64(2), 199-220.
- Kaenders, R. & Kirfel, C. (2018). *Ableitung und Tangente bei Basisfunktionen der Schule mit Elementargeometrie*, in Vorbereitung
- Stillwell, J. (1989). *Mathematics and Its History*, New York, Springer.