

## **Validieren im Beweisprozess – Formen des Validierens und ihre Relevanz für studentische Beweiskonstruktionen**

Validieren gilt als eine wesentliche Komponente des mathematischen Argumentierens und Beweisens im Bereich der Hochschule (Selden & Selden, 2003). Unter Validieren wird dabei das Bewerten potentieller Beweise hinsichtlich ihrer Gültigkeit verstanden. Darüber hinaus lässt sich Validieren auch als ein Teilprozess des Konstruierens auffassen, bei dem der eigene Beweis überprüft wird. Erste qualitative Untersuchungen studentischer Beweisprozesse zeigen, dass die Tätigkeit des Validierens fortlaufend im Beweisprozess stattfindet und überwiegend in Kombination mit anderen Phasen der Beweiskonstruktion auftritt (Kirsten, in Druck). In der hier vorgestellten Studie sollen die einzelnen Validierungstätigkeiten stärker fokussiert und ein Zusammenhang zwischen Beweiskonstruktion und -validierung hergestellt werden. Entsprechende Ergebnisse können neue Möglichkeiten zur Förderung des Beweisens in der Studieneingangsphase aufzeigen.

### **Theoretischer Hintergrund**

Das Validieren von Beweisen stellt weltweit für Lernende eine große Herausforderung dar. Internationale Studien berichten sowohl im schulischen als auch im universitären Kontext wiederholt von moderaten Leistungen beim Einschätzen der Gültigkeit eines Beweises (Selden & Selden, 2003; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009; Sommerhoff, Ufer & Kollar, 2016). Eine Spezifizierung der Schwierigkeiten wird dabei durch die von Heinze & Reiss (2003) formulierten Akzeptanzkriterien (*Beweisschema, Beweisstruktur, Beweiskette*) ermöglicht, die jeweils andere Bereiche eines Beweises fokussieren und so unterschiedliche Anforderungen an die Validierungstätigkeit beschreiben. Studien zeigen dabei, dass sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Studierende die größten Schwierigkeiten beim Prüfen der *Beweisstruktur* aufweisen. Entsprechend fällt es ihnen schwerer, globale Fehler im Beweisaufbau aufzudecken, als Fehler auf lokaler Ebene des Arguments zu identifizieren (Selden & Selden, 2003, Ufer et al., 2009, Sommerhoff et al., 2016). Eine derartige Fokussierung auf die Ebene des Arguments lässt sich auch im Prozess des Validierens erkennen (Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003). Hier konzentrieren sich Studierende vermehrt auf die einzelnen Beweisschritte und prüfen Beweise überwiegend zeilenweise. Die Struktur eines Beweises sowie die einer Schlussfolgerung zugrundeliegende Schlussregel wird hingegen nur selten betrachtet. Darüber hinaus stellen Selden & Selden (2003) fest, dass die Entscheidung, ob ein

Beweis Gültigkeit besitzt, bei Studierenden häufig allein auf intuitiven Einschätzungen beruht, wodurch Fehleinschätzungen begünstigt werden.

### **Fragestellungen**

Während sich die genannten Studien auf Situationen beziehen, im Rahmen derer fremde Beweisversuche validiert werden, fokussiert die vorliegende Studie Validierungstätigkeiten, welche im Zuge der Beweiskonstruktion auftreten und den eigenen Beweisversuch betreffen. Ziel der Studie ist es, festzustellen, welche verschiedenen Formen von Validierungstätigkeiten im Beweisprozess von Studienanfängern der Mathematik auftreten und welche Merkmale eines Beweises während der Beweiskonstruktion von Studierenden überprüft werden. Darauf aufbauend sollen mögliche Zusammenhänge zwischen den verwendeten Validierungstätigkeiten und der Qualität eines konstruierten Beweises geprüft werden.

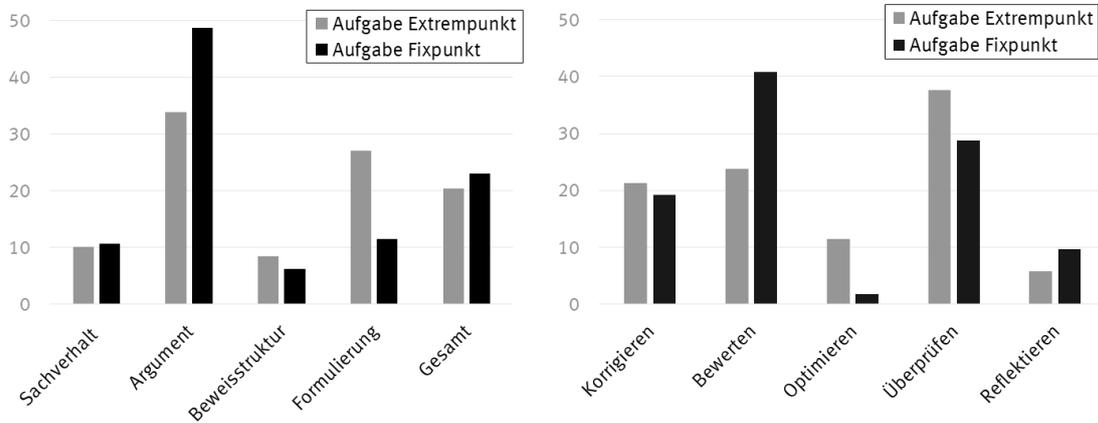
### **Methodik**

Für die Analyse der Validierungstätigkeiten wurden acht videographierte und transkribierte Beweiskonstruktionsprozesse aus dem Projekt *Apropos* verwendet, im Rahmen dessen Mathematik- und Lehramtsstudierende des ersten Studienjahrs verschiedene Aufgaben aus dem Bereich der Analysis in Paaren bearbeiteten (Kirsten, in Druck). Entsprechend der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring (2012) wurden zunächst diejenigen Stellen im Transkript identifiziert, welche Validierungen beschreiben. Anhand dieser wurde sodann das im Folgenden vorgestellte Kategoriensystem induktiv entwickelt und durch einen Zweitkodierer überprüft. Die Interraterreliabilität (Cohens Kappa) ist zufriedenstellend (.61-.70). Um einen Zusammenhang zwischen den Validierungstätigkeiten und der Qualität der Beweise zu prüfen, wurden die Beweisprodukte nach einem 5-stufigen Schema (*kein Ansatz bis vollständig korrekter Beweis*) kategorisiert.

### **Ergebnisse**

Im Zuge der Kategorienbildung konnten zwei verschiedene Dimensionen von Validierungen herausgearbeitet werden: Während die eine Dimension die Art der Validierungstätigkeit beschreibt (*Korrigieren, Bewerten, Optimieren, Überprüfen und Reflektieren*), fokussiert die andere Dimension die Objekte, welche einer Validierung unterzogen werden (*gegebener mathematischer Sachverhalt, einzelnes Argument, Beweisstruktur, Formulierungen und gesamter Ansatz*). Bezüglich der Dimension der Objekte fällt auf, dass ein Großteil der Validierungen auf der Ebene des einzelnen Arguments stattfindet. Verhältnismäßig selten wird hingegen die Beweisstruktur sowie die individuelle Vorstellung von der gegebenen Aussage hinterfragt (vgl.

Abb. 1). Ein Vergleich mit den prozentuellen Anteilen, welche die jeweiligen Phasen im Konstruktionsprozess einnehmen, zeigt zudem, dass die Aspekte *Struktur* und *Vorstellung von dem gegebenen Sachverhalt* erheblich seltener validiert werden als sie im Beweisprozess auftreten.



**Abb. 1: Anteil der hinterfragten Gegenstände (links) bzw. der Tätigkeiten (rechts) an den Validierungsaktivitäten**

Bei den verschiedenen Arten von Validierungstätigkeiten entfallen hohe Anteile auf intuitive Bewertungen und wissensbasierte Überprüfungen (vgl. Abb. 1). Optimierungen sowie reflektierte Standortbestimmungen nehmen Studierende hingegen selten vor. Ein Vergleich von Beweisprozessen mit qualitativ hochwertigen Lösungen (Kategorien 4 und 5) mit solchen, in denen kein adäquater Ansatz entwickelt werden konnte (Kategorien 1 und 2), zeigt, dass bei erfolgreichen Beweisprozessen begründete Validierungsformen tendenziell einen höheren Anteil einnehmen. In weniger erfolgreichen Beweisprozessen dominieren hingegen intuitive Formen der Bewertung.

## Diskussion

Die Ergebnisse der Studie replizieren Forschungsergebnisse (Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003; Sommerhoff et al. 2016) und ergänzen sie insofern, als die Erkenntnisse auf den Kontext der Beweiskonstruktion übertragen werden. Auch hier fokussieren sich Studierende beim Validieren in erster Linie auf einzelne Beweisschritte und überprüfen die zugrundeliegende Beweisstruktur nur in geringem Maße. Für eine präzisere Anbindung der induktiv gewonnenen Kategorien erscheint jedoch eine theoriegeleitete Ausdifferenzierung des Kategoriensystems notwendig. So ist zu vermuten, dass das Kriterium der *Beweiskette* nach Heinze & Reiss (2003) hier in den Kategorien *einzelnes Argument* und *Beweisstruktur* aufgeht. Zudem könnte eine Bewertung der Validierungen unter mathematischen Gesichtspunkten gewinnbringend sein, um die Qualität der Validierungen berücksichtigen und von hier auf den Zusammenhang von Validieren und Konstruieren

schließen zu können. Die Ergebnisse der Studie zeigen darüber hinaus in Übereinstimmung mit Selden & Selden (2003), dass insbesondere in wenig erfolgreichen Beweisprozessen ein erheblicher Anteil an Validierungen auf intuitiven Einschätzungen beruht. Beweisprozesse, die zu einem adäquaten Beweis führen, weisen in höherem Maße Validierungen auf, die sich auf Objekteigenschaften beziehen oder die Rahmentheorie berücksichtigen. Diese Tendenz bedarf jedoch einer Bestätigung anhand einer größeren Stichprobe.

Vor dem Hintergrund dieser ersten Ergebnisse erscheint es notwendig, insbesondere begründete Formen des Validierens verstärkt zu fördern. Über die Vermittlung von Akzeptanzkriterien hinaus gilt es dabei, den Studierenden konkrete Strategien und Hilfsmittel zur Verfügung zu stellen, welche die Implementation dieses Wissens im Validierungsprozess anleiten und so erleichtern. Eine solche Förderung könnte sich sodann auch positiv auf die Konstruktion von Beweisen auswirken. Auf der anderen Seite legen es die Ergebnisse der Studie nahe, vermehrt Reflexionsanlässe zu schaffen, um intuitive Einschätzungen zur Gültigkeit eines Beweises bzw. dessen einzelner Komponenten zu hinterfragen. Auf diese Weise können Fehleinschätzungen aufgedeckt und über die Verwendung begründeter Validierungsformen schrittweise adäquate und selbstreflektierte Haltungen entwickelt werden.

## Literatur

- Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis. Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof. Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *International Newsletter of Proof Competence* (Vol. 4).
- Kirsten, K. (in Druck). Theoretical and Empirical Description of Phases in the Proving Processes of Undergraduates. In *Proceedings of the Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Kristiansand, Norwegen: University of Agder and INDRUM.
- Mayring, P. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz.
- Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts. Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Sommerhoff, D., Ufer, S. & Kollar, I. (2016). Validieren von Beweisen. Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (1127-1130). Münster: WTM-Verlag.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 101-119.