

Peter KLÖPPING, Ana KUZLE, Potsdam & Pi-Jen LIN, Hsinchu (Taiwan)

Mathematisches Argumentieren in der Grundschule: eine kulturelle Vergleichsperspektive zwischen Deutschland und Taiwan

Im Rahmen der taiwanesisch-deutschen Forschungs Kooperation *Taiwanese-German Research Program on Cultural-Societal Influences in Mathematics Education (TaiGer)* werden Einfluss und Auswirkungen gesellschaftlich-kulturell geprägter Bedingungsfaktoren auf die Individualebene untersucht. Hierin eingebettet ist die vorliegende interkulturelle Vergleichsuntersuchung zu mathematischen Argumentationskompetenzen von Grundschulkindern der Klasse 4 in Deutschland und Taiwan. Unter Berücksichtigung kultureller und gesellschaftlicher Rahmenbedingungen sollen im Zuge der Studie Faktoren identifiziert werden, die Einfluss auf das Lehren und Lernen mathematischen Argumentierens in der Grundschule nehmen.

Das Projekt fokussiert auf zwei Perspektiven des mathematischen Argumentierens in der Grundschule. Einerseits werden Grundschul Kinder der Klasse 4 mit Hilfe von offenen und geschlossenen Aufgabenformaten auf ihre Argumentationskompetenzen hin untersucht und andererseits werden die Lehrkräfte dieser Klassen in leitfadengestützten Interviews zu ihrem Wissen und ihren Einstellungen bezüglich des Argumentierens in der Grundschule befragt. Der Forschungsschwerpunkt konzentriert sich auf die Verbindung beider Perspektiven. Ausgehend von subjektiven Theorien der Lehrkräfte, die Einstellungen zu Lehren und Lernen mit dem Fokus auf mathematischem Argumentieren einschließen, sollen Ursache dieser und deren Wirkung auf den Unterricht erforscht werden. In diesem Verständnis wird der Effekt auf die Argumentationskompetenzen der Kinder mitgedacht und mit untersucht.

Erhebungsinstrumente

Die Argumentationskompetenzen der Grundschul Kinder wurden mit Hilfe eines von den Autoren entwickelten Multiple-Choice-Tests erhoben, der 14 Items mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten umfasst. Weiterhin wurde ein Testbogen bestehend aus fünf Items mit halboffenen und offenen Aufgabenformaten entwickelt und verwendet, um einen tiefer gehenden Einblick in die Denkprozesse der Schülerinnen und Schüler zu bekommen. Die Aufgaben dieses Testbogens orientieren sich an dem Modell des mathematischen Argumentierens für die Grundschule nach Bezold (2012). Neben einer inhaltlich-mathematischen Dimension der Kategorisierung der Testitems, die in arithmetische und geometrische Aufgaben unterscheidet, wurden für den Multiple-Choice-Test basierend auf Lin (2016) Kategorien verwendet, die

einzelne Schritte des Argumentationsprozesses hervorheben. Hier wurde auf frühere Strukturierungen des Argumentierens (Toulmin, 1958), des Beweisens und des Vermutens (u.a. Cañadas & Castro, 2005) zurückgegriffen, um ein möglichst umfassendes Bild der Argumentationsqualität zu erfassen.

Der Interviewleitfaden zur Befragung der Lehrkräfte bezüglich ihres Wissens und ihren Einstellungen zum mathematischen Argumentieren in der Grundschule stützt sich auf frühere qualitative Forschungsarbeiten insbesondere auf dem Gebiet des Beweisens (u.a. Conner, 2007; Knuth, 2002). Fragen zu Aspekten des Unterrichtens vom begründeten Vermuten (u.a. Bergqvist, 2005) wurden im Leitfaden ebenso aufgegriffen wie Fragen zu Einstellungen zum Unterrichten wissenschaftlichen Argumentierens.

Auswertung der Pilotierung

An der Pilotierung nahmen 65 Schülerinnen und Schüler aus drei taiwanesischen Klassen sowie deren Lehrkräfte und 63 Schülerinnen und Schüler aus deutschen Klassen samt deren Lehrkräfte teil. Die Auswertung des Multiple-Choice-Tests zeigte im Vergleich der beiden Länder, dass die taiwanesischen Schülerinnen und Schüler durchschnittlich mehr Fragen richtig beantworten konnten. Da es bei einigen Items zu sehr deutlichen Unterschieden im Antwortverhalten kam, wurde vor dem Hintergrund der Fragestellung bei der Auswertung der Pilotierung besonders auf diese Items fokussiert. Auf Grundlage der weiteren zur Verfügung stehenden Daten wurde nach Erklärungen für die Unterschiede im Antwortverhalten gesucht. Schwierigkeiten aufgrund der Aufgabenformulierung, die Lesekompetenz der Grundschulkinder betreffend, und Probleme, die eventuell durch die Übersetzung der Items verursacht wurden, werden bei der weiteren Evaluierung der Erhebungsinstrumente berücksichtigt, seien jedoch an dieser Stelle lediglich erwähnt. Zwei Fragen des Multiple-Choice-Tests, bei denen es zu auffälligen Unterschieden in den Ergebnissen kam, werden nun detaillierter betrachtet.

12. Lara vermutet, dass der Umfang eines Quadrats gleich viermal die Seitenlänge des Quadrats ist. Was sollte Lara am besten sagen, um andere Kinder davon zu überzeugen?
- a) Mit einer Schnur der Länge 12 cm kann man ein Quadrat bilden, sodass jede Seite 3 cm lang ist.
 - b) Die Umfänge aller Quadrate, die wir aus dem Unterricht kennen, sind gleich viermal die Seitenlänge des Quadrats.
 - c) Ich nehme das Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm. Dann ist der Umfang gleich $5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} = 4 \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}$.
 - d) Der Umfang eines Quadrats ist die Summe der vier gleichlangen Seiten. Also ist der Umfang gleich viermal die Seitenlänge des Quadrats.

Abb. 1: Item 12: „Umfang eines Quadrats“.

Die Aufgabe „Umfang eines Quadrats“ (siehe Abb. 1) aus dem Multiple-Choice-Test spiegelt in den Antwortmöglichkeiten unterschiedliche Niveaus

des mathematischen Argumentierens. Mathematische Eigenschaften werden in den Argumenten genauso herangezogen wie Aussagen ohne mathematische Einsicht, um zu überzeugen. Auffällig sind die abweichenden Antworthäufigkeiten der taiwanesischen und deutschen Grundschülerinnen und -schüler bei der letzten Antwortmöglichkeit: dem Argument, das sich nur auf mathematische Eigenschaften stützt (vgl. Tab. 1).

Tab. 1: Item 12: Relative Häufigkeiten der Antworten in Prozent

	Antwort a)	Antwort b)	Antwort c)	Antwort d)
Taiwan	9,23%	12,31%	9,23%	69,23%
Deutschland	20,63%	14,29%	34,92%	20,63%

(In Deutschland gaben außerdem jeweils 3 Schülerinnen und Schüler (jeweils 4,76%) mehrere Antworten sowie keine Antwort. Taiwan ($N_1 = 65$), Deutschland ($N_2 = 63$).)

In einem ähnlichen Item, das eine mathematische Aussage zum Umfang eines Rechtecks thematisiert, überzeugten 28 der 63 Grundschulkinder aus Deutschland (44,44%) Argumente mit Beispielnennung. Die Antwortmöglichkeit, die sich ausschließlich auf mathematische Eigenschaften stützt, überzeugte nur 20 Kinder aus deutschen Grundschulen (31,75%) am meisten, wohingegen 56,92% der taiwanesischen Schülerinnen und Schüler diese Aussage am überzeugendsten bewerteten. Argumente, die Beispiele beinhalten, und solche, die allgemein und nur mit mathematischen Eigenschaften argumentieren, scheinen in ihrer Überzeugungskraft von den taiwanesischen und deutschen Grundschulkindern unterschiedlich wahrgenommen zu werden. Dies führt zur These, dass die Überzeugungskraft mathematischer Argumente in der Grundschule kulturell geprägt ist.

5. Benno, Anna und Taro haben mehrere Rechtecke mit einem Umfang von 18 cm gezeichnet. Sie haben die Seitenlängen der gezeichneten Rechtecke in eine Tabelle eingetragen und sind zu folgender Vermutung gekommen: „Die Summe der Länge und der Breite des Rechtecks ist halb so groß wie der Umfang des Rechtecks. Also die Hälfte von 18 cm.“

Umfang	18	18	18	18	18
Länge	8	7	5	3	2
Breite	1	2	4	6	7

Hier ihr Gespräch dazu:

Benno: „Das stimmt, da $8 + 1 = 9$, $7 + 2 = 9$ und $5 + 4 = 9$.“

Anna: „Es stimmt, weil dies für jedes Seitenpaar in der Tabelle wahr ist.“

Taro: „Die Vermutung stimmt, da ein Rechteck zwei Paare gleich langer Seiten hat.“

Abb. 2: Aufgabe 5: „Umfang eines Rechtecks“.

Der Testbogen mit halboffenen und offenen Antwortmöglichkeiten wurde zunächst für die deutsche Seite ausgewertet, da eine Übersetzung bisher nicht vorliegt. Einen Anknüpfungspunkt an die aufgestellte These liefert die Aufgabe „Umfang eines Rechtecks“ (siehe Abb. 2), da die Qualität der Argumente bezogen auf die Nutzung mathematischer Eigenschaften sich unterschiedlich stark in den Aussagen der Kinder der Aufgabe widerspiegelt.

Die Häufigkeitsverteilung bezogen auf den Arbeitsauftrag „Wer überzeugt dich am meisten?“ fällt in den drei deutschen Klassen durchaus unterschiedlich aus. So überzeugen Bennos Beispielrechnungen zwar in allen Klassen häufig – in einer Klasse von mehr als 80% der Kinder ausgewählt – und Anna überzeugt kaum, doch Taros Aussage wird in einer Klasse mit 42,86% im Gegensatz zu den anderen Klassen mit 15,79% und 12,50% besonders häufig gewählt. In Konsequenz dessen lässt sich die aufgestellte These verdichten. Dies führt zur Hypothese, dass das Niveau des Argumentierens abhängig von der Argumentationskultur innerhalb der Klasse ist.

Fazit und Ausblick

Die Pilotierung hat gezeigt, dass die Überzeugungskraft mathematischer Argumente eine Facette mathematischen Argumentierens ist, die unterrichtskulturell geprägt sein könnte. Die Lehrerinterviews bieten hier eine Möglichkeit, solche unterrichtskulturellen Unterschiede zu erklären und besser zu verstehen. Dabei gilt es, Parallelen zwischen Aussagen der Lehrkräfte und Erklärungen der Kinder zu finden und Bezüge herzustellen. Weitere Analysen der Daten soll Grundlage für eine Revision der Instrumente sein, mit dem Ziel die Abstimmung der Instrumente aufeinander zu verbessern. Besonders in dieser angedachten Multiperspektivität sehen die Autoren das Potential, Faktoren zu identifizieren, die das Lehren und Lernen mathematischen Argumentierens in der Grundschule beeinflussen und bedingen.

Literatur

- Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 171–191.
- Bezold, A. (2012). Förderung von Argumentationskompetenzen auf der Grundlage von Forscheraufgaben. Eine empirische Studie im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica*, 35, 73–103.
- Cañadas, M.C., & Castro, E. (2005). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the 4th Conference of European Research in Mathematics Education* (S. 401–408). San Feliu de Guixols, Spanien.
- Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classroom* (Unveröffentlichte Dissertation). The Pennsylvania State University, University Park.
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61–88.
- Lin, P. J. (2016). Quality of students' argumentation used in a fourth-grade classroom. *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 211–218). Szeged, Ungarn: PME.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.