Henning KÖRNER, Oldenburg

Grenzprozesse – Ein Unterrichtskonzept zum propädeutischen Grenzwertbegriff

Anina: Jedes n-Eck, auch wenn es noch so viele Ecken hat, kann kein Kreis sein, also ist ein Kreis ein „Unendlicheck".
Benni: Aber dann würde die Kreisfläche ja aus unendlich vielen Dreiecken mit dem Flächeninhalt 0 bestehen. Also wäre der Flächeninhalt $\infty \cdot 0$. Ist das nicht 0?
Claas: Nein, $\infty \cdot 0 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$.
Dorit: Der Kreis ist rund, und ein n-Eck, auch ein 100 000-Eck, ist eckig, und das ist etwas anderes. Kein n-Eck hat den Flächeninhalt π.
Emil: Gut, der Unterschied zu π wird immer kleiner, aber nicht Null, wenn die Eckenzahl wächst.
Frederieke: Wenn der Unterschied nicht Null wird, dann eben unendlich klein, also $\frac{1}{\infty}$.

Die Vorstellungen zum Unendlichen sind vielfältig, aber immer schon vorhanden, unabhängig von einer unterrichtlichen Behandlung (zu empirischen Untersuchungen siehe Marx 2013). Die manchmal von Hochschulseite gehörte Forderung, an der Schule nichts zum Grenzwertbegriff zu machen, sondern zu warten, bis die Universität das gleich ‚richtig' macht, läuft daher leer. Da die formale Grenzwertdefinition außerhalb real möglicher unterrichtlicher Behandlung liegt, wird für Schule – auch von den Bildungsstandards – ein propädeutischer Grenzwertbegriff gefordert (vgl. auch Lensing/Roesken-Winter S.564). Es bleibt allerdings meist bei einer plakativen Formulierung und damit weitgehend offen, was genau damit gemeint ist. Im KC für die Klasse 10 in Niedersachsen ist mittlerweile eine Konkretion vorgenommen worden, es gibt einen eigenen Lernbereich zum Thema. Hier wird eine konzeptionelle Umsetzung für ein Schulbuch vorgestellt (Körner u.a., 2017). Zentral ist eine „intellektuell ehrliche" unterrichtliche Behandlung. Es müssen also sowohl vertraute Vorstellungen über Infinitesimales aufgenommen werden als auch weiterführende mathematische Konzepte hin zu einem (propädeutischen) Grenzwertbegriff angebahnt werden. (vgl. Henning/Hoffkamp, 2013, S.456). Dementsprechend gibt es zwei Lernabschnitte:

1. Grenzprozesse, 2. Der Grenzwert

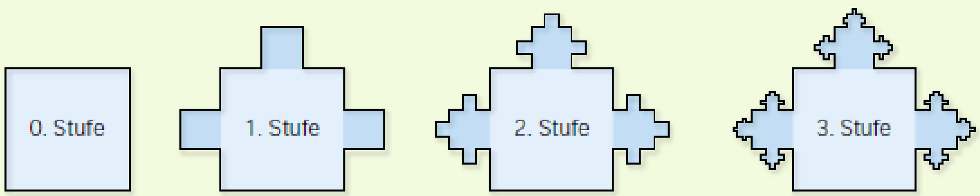
In 1. geht es um vielfältige Aktivitäten mit infinitesimalen Prozessen. Es werden Situationen aus dem vorherigen Unterricht aufgenommen, in denen diese stattfanden (irrationale Zahlen, exponentieller Zerfall, begrenztes Wachstum, Kreiszahl), aber nicht explizit thematisiert wurden. Hier kommt es zu einer ersten Präzisierung, es bleibt aber der Prozess im Mittelpunkt. Schülerinnen und Schüler sollen paradox erscheinende Situationen („wird immer größer, wächst aber nicht ins Unendliche", „wird immer kleiner, aber

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

nie 0“) ebenso erfahren und bearbeiten wie das Phänomen, dass die Grenzobjekte oft von ganz anderer Natur sind als die Elemente des Prozesses (irrationale Zahl als Grenzobjekt rationaler Zahlen, Punkt als Grenzobjekt von Dreiecken, später dann Tangente als Grenzlage von Sekanten). Im zweiten Lernabschnitt wird dann der entscheidende, für eine algorithmische Behandlung notwendige Schritt des Übergangs von der Prozessbetrachtung zur mehr statischen Betrachtung des Abstandes der Elemente des Prozesses vom Grenzobjekt vollzogen und damit die Begriffsbildung zum Grenzwert als theoretischem Konstrukt vollzogen (vgl. auch Lensing/Roesken-Winter, S.565). Genau dieser Schritt ist die kognitionstheoretische zentrale Schwierigkeit, vollzog sich in der Geschichte der Begriffsentwicklung zum Grenzwert ja auch erst nach etwa 200 Jahren im 19. Jahrhundert. Oder mit Peter Bender gesprochen: 1. untersucht das numerisch Wesentliche, 2. das infinitesimal Wesentliche (Bender, 1991, S.240). Mithilfe digitaler Werkzeuge kann hier auch ein präformaler ‚Grenzwertnachweis‘ vollzogen werden, der das Grundprinzip der $\varepsilon - n_0$ -Definition benutzt, aber nicht zum formalen Abschluss bringt. Digitale Werkzeuge spielen auch in 1. eine zentrale Rolle, weil sie infinitesimale Prozesse gut erlebbar machen. Dies gilt vor allem für iterativ formulierte Prozesse. So sind bspw. geometrische Reihen kein expliziter Gegenstand im Unterricht, können aber mit $x_n = x_{n-1} + 9 \cdot 0{,}1^n, x_1 = 0{,}9$ und einem GTR tabellarisch und grafisch untersucht werden. Grundsätzlich wird auf eine explizite Thematisierung von Folgen als Untersuchungsgegenstand verzichtet, sie treten aber natürlich ständig auf (entspricht Vorgabe im KC).

Im Folgenden wird ein exemplarischer Einblick in Aufgaben und Begriffsformulierungen aus dem Schulbuch gegeben. Die Diskussion des Gesprächs am Anfang ist eine Übungsaufgabe.

1.A Einführungsaufgabe zu Grenzprozessen:



Die Quadratpflanze wächst schrittweise von Jahr zu Jahr nach einer genauen Vorschrift. Die ersten Stufen sind abgebildet.

a) Starte mit einem Quadrat der Kantenlänge 1. Fülle die Tabelle aus.

Stufe n	0	1	2	3	4	5	6	7
Umfang U	4	■	8	■	■	■	■	■
Flächeninhalt A	1	$\frac{4}{3}$	■	■	$\frac{121}{81}$	■	■	■

b) Bestätige die folgenden Iterationsformeln mit deinen Tabellenwerten.

$u_n = u_{n-1} + 2;\ u_0 = 4$ $\qquad$ $a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{n-1} + 1;\ a_0 = 1$

Finde eine Begründung für die beiden Formeln.

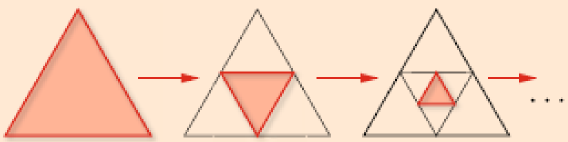
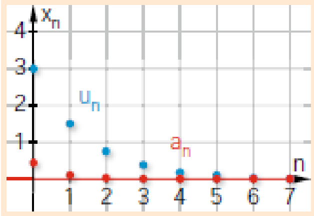
c) Untersuche die langfristige Entwicklung der Quadratpflanze grafisch-tabellarisch mit dem GTR. Was beobachtest du? Was ist überraschend?

Nimm zu der paradoxen Aussage Stellung.

> Man benötigt zur Umgrenzung einer endlichen Fläche einen unendlich langen Zaun.

1.B Ein Ausschnitt aus dem Basiswissen zu Grenzprozessen

Mittendreiecke in gleichseitigem Dreieck mit Seitenlänge 1

Prozess	Grenzobjekt
 Die Dreiecke werden immer kleiner und sind irgendwann nicht mehr von einem Punkt unterscheidbar.	Punkt
Umfang: $u_n = 0{,}5 \cdot u_{n-1};\ u_0 = 3$ Fläche: $a_n = \frac{1}{4} a_{n-1};\ a_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$	
Eine Folge immer kleiner werdender Zahlen kommt der Null beliebig nahe, wird aber nicht 0..	0

n	u_n	a_n
0	3	0,4330
1	1,5	0,1083
2	0,75	0,0271
3	0,375	0,0068
4	0,1875	0,0017

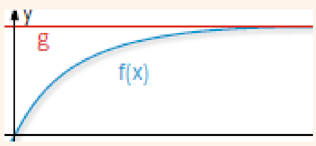
- Die Grenzobjekte sind oft von anderer Art als die Objekte des Prozesses, sie sind im Allgemeinen nicht die „letzte Station".
- Manchmal wird etwas immer größer, wächst aber nicht ins Unendliche.
- Manchmal wird etwas immer kleiner, wird aber nicht Null.

2.A Der Grenzwertbegriff

Der Grenzwert

Die entscheidende Idee für eine Präzisierung ist der Wechsel des Blicks vom Prozess des „sich Näherns" auf das Grenzobjekt des Prozesses.

(1) Ein Prozess nähert sich einem Grenzwert g beliebig an.



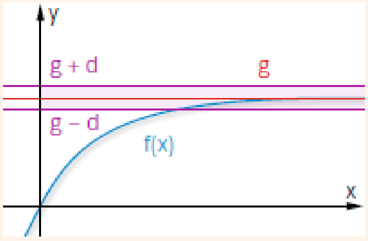
Was heißt „sich beliebig nähern"?

Der Abstand zu g wird kleiner, er wird beliebig klein.

Was heißt „beliebig klein"?

Der Abstand zu g wird kleiner als jeder, noch so kleine, vorgegebene Wert.

(2) Ein Prozess nähert sich einem Grenzwert g, wenn der Abstand der Werte zu g kleiner wird als jeder beliebig kleine vorgegebene Wert d.
Anschaulich: g ist Grenzwert, wenn sich irgendwann alle Werte in jedem noch so schmalen Streifen um g befinden.



Man schreibt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$ oder $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} g$

2.B Ein präformaler ‚Grenzwertnachweis'

B Begründung für den Grenzwert bei begrenztem Wachstum

Begründe mit (2) aus dem Basiswissen, dass für $f(x) = -9 \cdot 0{,}8^x + 10$ gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 10$.

Lösung:

Der Abstand der Funktionswerte f(x) von g wird durch den Term $|g - f(x)|$ angegeben. Damit erhält man hier $|10 - (-9 \cdot 0{,}8^x + 10)| = |9 \cdot 0{,}8^x| = 9 \cdot 0{,}8^x$. Man wählt einen sehr kleinen Wert für d, z.B. 0,001. Dann sucht man den Wert für x so, dass $9 \cdot 0{,}8^x < 0{,}001$ gilt. Ab diesem Wert für x ist der Abstand von 10 kleiner als 0,001.

Auch wenn dies für beliebig kleiner gewählte Werte von d in gleicher Weise wiederholt werden kann, macht es den Grenzwert nur plausibel, es ist kein strenger Beweis.

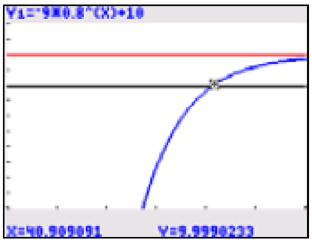
d	0,01	0,001	0,0001
x	> 31	> 41	> 52

X	Y1	Y2	Y3
21	9.917	10	0.083
22	9.9336	10	0.0664
23	9.9469	10	0.0531
24	9.9575	10	0.0425
25	9.966	10	0.034
26	9.9728	10	0.0272
27	9.9782	10	0.0218
28	9.9826	10	0.0174
29	9.9861	10	0.0139
30	9.9889	10	0.0111
31	9.9911	10	0.0089

Y3=0.0089131682828

X	Y1	Y2	Y3
43	9.9994	10	6.1E-4
44	9.9995	10	4.9E-4
45	9.9996	10	3.9E-4
46	9.9997	10	3.1E-4
47	9.9997	10	2.5E-4
48	9.9998	10	2E-4
49	9.9998	10	1.6E-4
50	9.9999	10	1.3E-4
51	9.9999	10	1E-4
52	9.9999	10	8.2E-5
53	9.9999	10	6.6E-5

Y3=8.22094671E-5



Literatur

Bender, P. (1991): Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 44 (4), S. 238-243.

Henning, A., Hoffkamp, A. (2013): Aufbau von Vorstellungen zum Grenzwert im Analysisunterricht, Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, S. 456-459.

Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt, G., Zacharias, M. (2017): Mathematik Neue Wege, Niedersachsen 10, Hannover: Schroedel, S. 192-220.

Lensing, F., Roesken-Winter, B. (2015): Wie viel Grenzwert braucht der Mensch? – Unendlichkeit dynamisch und statisch begreifen, Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, S. 564-567.

Marx, A. (2013): Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. Journal für Mathematik-Didaktik 34, S. 73-97.