Kathlén KOHN & Ernst Ulrich DEUKER, Berlin

Der Komplex der nicht-chromatischen Skalen

Die musikalische Motivation der nachfolgenden Überlegungen ist es, das moderne 12-Ton-System der gleichstufigen Stimmung als Menge von ‚Buchstaben' einer musikalischen Sprache zu betrachten, auf der man in geeigneter Weise, mithilfe der Mathematik, ‚grammatikalische Strukturen' (auf der Basis des Konzepts der ‚nicht-chromatischen' Skalen) definiert, die man in freier Weise benutzen kann, um ‚musikalische Geschichten' zu erzählen (Improvisation) – in Analogie zur freien Rede in der Alltagssprache. Eine weitere Analogie ist die zur Malerei, wo man Primärfarben (plus Schwarz und Weiß) als ‚Buchstaben' definieren könnte, aus denen man die Mischfarben herstellt, die man auf der Leinwand schließlich benutzt. In ähnlicher Weise kann man in der Musik die nicht-chromatischen Skalen mischen, wenn man auch (teil-)chromatische Skalen verwenden will.

Die folgenden Ausführungen sind eine Zusammenfassung des gleichnamigen Artikels, der in der 25. Ausgabe der *Mitteilungen der DMV* erschienen ist (Kohn/Deuker). Die musikalischen Ideen, die hinter diesen Ausführungen stehen, wurden bereits im kürzlich erschienenen Buch von Deuker eingeführt.

Die zwölf Töne der gleichstufigen Stimmung sind die sieben *Stammtöne* C,D,E,F,G,A,H sowie die fünf Töne $C^\#/D^b,D^\#/E^b,F^\#/G^b,G^\#/A^b,A^\#/B^b$, die als Erniedrigung/Erhöhung der sieben Stammtöne auftreten. In der gleichstufigen Stimmung wird nicht zwischen den Tönen $C^\#$ und D^b unterschieden und wir werden im Folgenden immer die #-Konvention benutzen. Eine *Skala* ist nun einfach definiert als eine Teilmenge von
$\{C,C^\#,D,D^\#,E,F,F^\#,G,G^\#,A,A^\#,H\}$.

Die zwölf Töne haben eine *zyklische Ordnung*. So folgt nach dem H wieder das C. Diese zyklische Anordnung erlaubt es uns, einen Abstand zwischen zwei Tönen t_1,t_2 zu definieren: Zum einen können wir die Distanz von t_1 nach t_2 betrachten und zum anderen die Distanz von t_2 nach t_1. Der *Abstand* zwischen t_1 und t_2 ist das Minimum dieser beiden Distanzen. Die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Tönen einer Skala in der zyklischen Ordnung bezeichnen wir als die *Intervallfolge* der Skala. Die C-Dur-Skala $\{C,D,E,F,G,A,H\}$ hat zum Beispiel die Intervallfolge 2-2-1-2-2-2-1. Die zyklische Ordnung der zwölf Töne impliziert, dass die Intervalle einer Skala ebenfalls zyklisch angeordnet sind. Also können wir zum Beispiel ebenso sagen, dass die C-Dur-Skala die Intervallfolge 2-1-2-2-2-1-2 hat. Aus musikalischer Sicht würde man sagen, man startet die Dur-Skala von einem anderen *Grundton* als C ausgehend – in diesem Fall von D. Daraus ergeben sich die in der Musik häufig verwendeten *Kirchentonarten*, *D-Dorisch* im konkreten Fall.

Ein Intervall der Länge eins wird als *Halbton(schritt)* und ein Intervall der Länge zwei als *Ganzton(schritt)* bezeichnet. Die Skala, deren Intervalle zwölf Halbtöne sind (und die daher alle zwölf Töne enthält), wird *chromatische Skala* genannt. Daher nennen wir eine Skala, deren Intervallfolge keine zwei aufeinanderfolgenden Halbtonschritte enthält, *nicht-chromatisch*. Dies ist äquivalent dazu, dass die Skala keine drei aufeinanderfolgenden Töne in der zyklischen Ordnung enthält. Die C-Dur-Skala ist ein Beispiel für solch eine nicht-chromatische Skala.

Die nicht-chromatischen Skalen bilden einen *Simplizialkomplex*. Solch ein Simplizialkomplex ist auf einer Grundmenge G definiert als eine Menge K von endlichen Teilmengen von G, sodass alle Teilmengen einer Menge in K ebenfalls in K sind. Die Menge aller nicht-chromatischen Skalen ist ein Simplizialkomplex auf der Grundmenge der zwölf Töne. Das liegt daran, dass beim Entfernen von Tönen von einer nicht-chromatischen Skala die Skala stets nicht-chromatisch bleibt. Diesen *Komplex der nicht-chromatischen Skalen* bezeichnen wir im Folgenden mit K_{NC}. Mit anderen Worten können wir K_{NC} definieren als die Menge aller Teilmengen der zwölf Töne, die keine drei aufeinanderfolgenden Töne enthalten. Im Folgenden wollen wir auf drei Fragen über K_{NC} eingehen, die Mathematiker typischerweise an einen Simplizialkomplex stellen, und wir werden sehen, dass diese Fragen ebenfalls musikalisch relevant sind.

f-Vektor

Sei K ein Simplizialkomplex und *n* eine natürliche Zahl. Dann bezeichnen wir mit f_n die Anzahl der Mengen in K mit $n+1$ Elementen. Da die leere Menge in jedem Simplizialkomplex enthalten ist, setzen wir $f_{-1} = 1$. Die Liste $(f_{-1},f_0,f_1,f_2,f_3,...)$ aller dieser Zahlen wird *f -Vektor* von K genannt. Für unseren Simplizialkomplex K_{NC} bedeutet die Frage nach dem *f*-Vektor, wie viele nicht-chromatische Skalen es mit 0,1,2,3,...,12 Tönen gibt. Dies ist der *f*-Vektor von K_{NC}:

(1,	12,	66,	208,	399,	456,	282,	72,	3)
$(f_{-1}$,	f_0,	f_1,	f_2,	f_3,	f_4,	f_5,	f_6,	$f_7)$

Dies bedeutet insbesondere, dass es keine nicht-chromatischen Skalen mit neun oder mehr Tönen gibt, und dass es genau drei solche Skalen mit acht Tönen gibt.

Facetten

Die *inklusionsmaximalen* Mengen in einem Simplizialkomplex K werden auch *Facetten* genannt. Dies sind also alle Mengen in K, die nicht in einer größeren Menge aus K enthalten sind. In der Sprache der Musik ausgedrückt wollen wir wissen, wie viele nicht-chromatische Skalen es gibt, zu denen man keinen weiteren Ton hinzufügen kann, ohne zwei aufeinanderfolgende Halbtonschritte zu erzeugen. Ein Beispiel für eine solche Skala ist die C-Dur-Skala. Dies ist ebenfalls beim Improvisieren ein wichtiges Konzept: Man muss sich nur diese maximalen nicht-chromatischen Skalen merken, da alle anderen nicht-chromatischen Skalen Teilmengen der maximalen sind. Das ist auch der Grund, warum sich das erwähnte Buch von Deuker detailliert mit diesen Skalen beschäftigt. In unserem Artikel zeigen wir, dass es genau 57 maximale nicht-chromatische Skalen gibt, und gehen auf deren Bedeutung in der Musikgeschichte ein (Kohn/Deuker). Im Folgenden wollen wir ebenfalls die 57 Facetten von K_{NC} auflisten. Insbesondere sehen wir, dass diese Facetten verschieden groß sind. In der Mathematik sagen wir dazu, dass K_{NC} nicht *pur* ist.

Anzahl Töne	*Intervallfolge*	*Anzahl Skalen*	*Name*
8	2−1−2−1−2−1−2−1	3	vermindert
7	2−2−1−2−2−2−1	12	Dur
7	2−1−2−2−2−2−1	12	melodisch Moll
7	2−1−2−2−1−3−1	12	harmonisch Moll
7	2−2−1−2−1−3−1	12	harmonisch Dur
6	2−2−2−2−2−2	2	Ganzton
6	1−3−1−3−1−3	4	übermäßig

Topologie

Aus topologischer Sicht ist es eine der wichtigsten Fragestellungen, die Homologie eines gegebenen Simplizialkomplexes zu bestimmen. Intuitiv gesehen bestimmt die Homologie eines Komplexes, wie viele Löcher verschiedener Dimensionen der Komplex hat. In unserem Artikel beschreiben wir diese Bestimmung ausführlich für den Komplex der nicht-chromatischen Skalen (Kohn/Deuker). Wir fassen hier unsere Resultate kurz zusammen:

K_{NC} hat genau drei Löcher. Diese sind alle fünf-dimensional, d.h. der Rand jedes Loches besteht aus Hexatoniken. Dabei sind die Hexatoniken auf dem Rand eines fixen Loches genau die 27 Hexatoniken, die in der neun-tönigen

Skala enthalten sind, welche man durch das Entfernen eines fixen übermäßigen Dreiklangs aus den zwölf Tönen erhält. Mathematisch gesehen bedeutet dies, dass wir sogar eine explizite *Basis* der Homologie bestimmen können. Weiterhin stellen wir fest, dass jedes Loch isomorph zur fünf-dimensionalen Sphäre ist. Zudem sind diese drei 5-Sphären topologisch gesehen an einem einzelnen Punkt verklebt. Die sieben- und acht-tönigen Skalen in K_{NC} sind außen an die 5-Sphären geklebt. Wir können uns also K_{NC} so vorstellen, dass man drei sechs-dimensionale Luftballons an einem Punkt zusammenhält und außenherum einen höher-dimensionalen Bezug aufklebt.

Ausblick

Die mathematische Beschreibung des ‚12-Ton-Universums' als Simplizialkomplex mit 57 musikalischen ‚Grundfarben' hat für die musikalische Praxis die Folge, dass der Skalenraum dadurch systematisiert wird – jede denkbare harmonische Situation kann mithilfe dieser Grundfarben ‚ausgemalt' werden. Im Spannungsfeld zwischen Skalen und zugrundeliegenden Akkorden wird man allerdings oft Teilskalen (Pentatoniken oder Hexatoniken) dieser Grundskalen verwenden, die entstehen, wenn man gewisse *avoid notes* weglässt, die im harmonischen Zusammenhang ‚ungeschickt gewählt' wirken. Die genauere mathematische Untersuchung der Zusammenhänge rund um diese *avoid notes* ist ein noch weitgehend unbearbeitetes Feld.

Literatur

Deuker, E. U. (2016). *On the Way to a Grammar of Free Musical Speech: A Pentatonic Approach to Improvisation*. Books on Demand.

Kohn, K. & Deuker, E. U. (2017). Der Komplex der nicht-chromatischen Skalen. In: *Mitteilungen der DMV, 25*, 17-25.