Sebastian KOLLHOFF, Bielefeld

Transferprozesse und Darstellungswechsel in der Entwicklung elementarer Bruchzahlvorstellungen

Die visuelle Darstellung ist eines der zentralen Werkzeuge im Mathematikunterricht, um auch komplexe und abstrakte mathematische Sachverhalte für Lernende zugänglich zu machen. Neben dem Aspekt der Veranschaulichung mathematischer Sachverhalte dienen visuelle Repräsentationen als Kommunikationsgrundlage sowie als Ausgangspunkt für Argumentationen. Sie fördern auf diese Weise den Aufbau tragfähiger mentaler Modelle dieser mathematischen Objekte, die u.a. ein operatives Handeln auf mentaler Ebene und eine Interpretation in realen Anwendungssituationen ermöglichen (vgl. vom Hofe, & Blum 2016). Da eine einzige Darstellung in den seltensten Fällen die Komplexität mathematischer Konzepte abbildet, ist es oftmals notwendig vielfältige Darstellungen zu nutzen, die einander ergänzen und verschiedene Begriffsaspekte hervorheben (vgl. Rau 2017).

In der Entwicklung von tragfähigen Grundvorstellungen von Bruchzahlen hat sich der Einsatz einer Vielfalt von Darstellungen und der Wechsel zwischen diesen zur Vernetzung von Wissensstrukturen, insbesondere verschiedener Bruchzahlaspekte, als besonders bedeutsam erwiesen, um die Ausbildung von isolierten Inselvorstellungen zu vermeiden. Diese können den Aufbau von tragfähigen Bruchzahlvorstellungen erschweren und die Entwicklung von Fehlvorstellungen zur Folge haben (vgl. Wartha 2007).

Darstellungswechsel als Transferprozesse

Der Wechsel zwischen verschiedenen visuellen Darstellungen erfordert die Koordination von Wissen über den mathematischen Inhalt (d.h. das mathematische Objekt mit seinen Eigenschaften und Relationen zu anderen Objekten) und Wissen über die Eigenschaften des Repräsentationssystems sowie dessen Verbindungen zum mathematischen Inhalt. Dafür ist es notwendig, das mathematische Objekt von seiner initialen Repräsentation loszulösen und die wesentlichen Eigenschaften des Objekts auf die neue Repräsentation zu übertragen (vgl. „Dissoziation“ bei Duval 2006). Zudem bedarf dieser Prozess der Übertragung von Eigenschaften auf eine Repräsentation eine Reorganisation des Wissens über diese Repräsentation, um die Eigenschaften des Objekts angemessen zu adaptieren (vgl. Superfine et al. 2009).

Die Prozesse dieser Übertragung von Wissensstrukturen auf eine neue Darstellung können als *Transferprozesse* (vgl. Kollhoff 2017) bezeichnet werden, in denen vorhandene Wissensstrukturen auf eine neue Anwendungssituation übertragen werden. Diese Transferprozesse sind integrale Bestandteile von sukzessiven Lernprozessen und der Begriffsbildung und hängen von der Ausprägung, Vernetzung und Tragfähigkeit von Grundvorstellungen ab und nehmen wechselseitig Einfluss auf ihre Entwicklung (vgl. ebd.).

Darstellungswechsel von Flächenfiguren zur Strecke

Im Folgenden werden Beispiele aus einer Studie zur deskriptiven Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung von elementaren Bruchzahlvorstellungen (ebd.) dargestellt. Diese Beispiele stammen aus dem Beginn einer Unterrichtseinheit zur Einführung von Brüchen in einer fünften Gymnasialklasse. In einer ersten Unterrichtsstunde haben die Schüler(innen) das Teilen eines Ganzen in gleich große Teile zum Erhalt von Stammbrüchen erarbeitet und in der Folgestunde diesen ersten Schritt der Bruchherstellung um ein Vervielfachen des Teils zum Erhalt von echten Brüchen erweitert. Dabei wurden ausschließlich Kreis- und Rechteckrepräsentationen zur Darstellung des Herstellungsverfahrens genutzt. Die folgenden Fallbeispiele stammen aus dieser zweiten Unterrichtsstunde, in der die Schüler(innen) nun erstmals vor der Aufgabe stehen, Brüche in einer Strecke einzuzeichnen (siehe Abbildung 1).

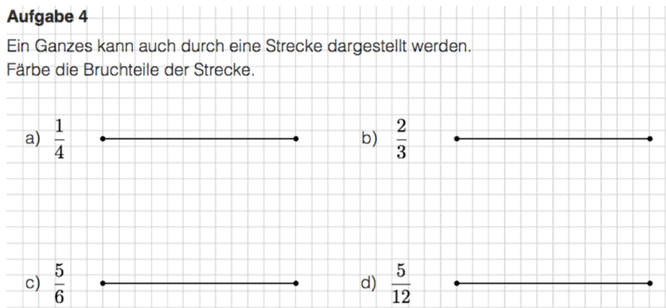

Abbildung 1: Darstellung von Brüchen durch eine Strecke

Bennet & Julius – Spontane Übertragung des Herstellungsverfahrens

Nachdem die beiden Schüler die Aufgabenstellung gelesen haben, beginnen sie unmittelbar mit dem Einzeichnen der vorgegebenen Brüche:

Julius: Das ist einfach. Da muss man doch nur hier das in vier Teile aufteilen und dann eins davon nehmen. Und da 6 und dann 5 davon nehmen.
Bennet: Ja, genau.
Julius: Da müssen wir erstmal messen. Wie lange genau ist das?
Bennet: Fünf.
Julius: Fünf. Wie viel brauchen wir? Vier. Das heißt immer ...

Julius stellt sofort fest, dass diese Aufgabe „einfach“ sei (1) und erklärt das Vorgehen für die Teilaufgaben a) und c): „Da muss man doch nur hier das in vier Teile aufteilen und dann eins davon nehmen. Und da 6 und dann 5 davon nehmen“ (1–3). Hier ist zu erkennen, dass er die beiden Operatoren zur Bruchherstellung auf die Darstellung an einer Strecke überträgt und somit zunächst die Strecke in gleich große Teile einteilt, von denen er dann die entsprechende Anzahl färbt. Dazu muss jedoch zunächst die Länge der ganzen Strecke bestimmt werden (5). Es ist zu erkennen, dass für die beiden Schüler die Übertragung der Bruchdarstellung von einer Kreis- und Rechteckdarstellung auf eine Darstellung an einer Strecke keine Schwierigkeit darstellt und sie über die Anwendung des Bruchherstellungsverfahrens unmittelbar wissen, wie sie vorgehen müssen.

Aliya & Aisha – Statische vs. dynamische Bruchvorstellung

Auch den beiden Schülerinnen Aliya und Aisha gelingt der Darstellungswechsel zur Strecke, jedoch zeigt Aisha zunächst eine typische Schwierigkeit für diesen Prozess.

Aisha: Ja hier, 1 Viertel sind von vier Stücken eins von vier Stücken.
Aliya: Also, wie viele Kästchen sind das?
Aisha: 4 Stück.
Aliya: Nein! Nein, warte, du musst doch erstmal die Kästchen zählen. 2, 4, 6, 8, 10, 12.
Aisha: Achso.
Aliya: Also müssen wir 12 durch 4 und das sind ...
Aisha: 3.
Aliya: Ja, Und dann hier so’n Strich bei 3 machen, oder? Nee, färben.
Aisha: Was?

Aisha zeigt unmittelbar nach dem Lesen der Aufgabenstellung, dass sie eine statische Vorstellung des Bruchs $\frac{1}{4}$ aktivieren kann: „1 Viertel sind von vier Stücken eins“ (1). Auf die Frage ihrer Partnerin, wie viele Kästchen der Strecke folglich eingefärbt werden müssen, antwortet sie entsprechend „4 Stück“ (3), wobei sie nicht die Länge der Strecke in Betracht zieht, sondern lediglich meint, dass es insgesamt vier Stücke sein müssen. Hier ist zu erkennen, dass es für die Darstellung von Brüchen nicht ausreicht eine statische Bruchvorstellung zu aktivieren, sondern diese auch in eine dynamische Handlung übersetzt werden muss, die als eine Zeichenhandlung auf die Repräsentation angewendet werden kann, wie ihre Partnerin Aliya es in der Folge zeigt (4–9).

Can & Philip – Mangelndes Verständnis der Bruchherstellung

Die beiden Schüler Can und Philip haben bereits zu Beginn der Unterrichtsstunde Schwierigkeiten bei der Darstellung von Brüchen in einem Kreis oder Rechteck gehabt. In ihrer vorhergehenden Darstellung des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist zu erkennen, dass sie den ersten Operator nicht als Teilen des Ganzen in drei gleich große Teile, sondern als Einzeichnen von drei beliebigen Teilen interpretieren. Den zweiten Operator zum Vervielfachen eines Teils interpretieren sie als Hinzufügen weiterer Teile (siehe Abbildung 2). In der Folge gelingt es ihnen nicht das Verfahren auf die neue Darstellung der Strecke zu übertragen, sodass sie die Brüche nach Augenmaß einzeichnen.

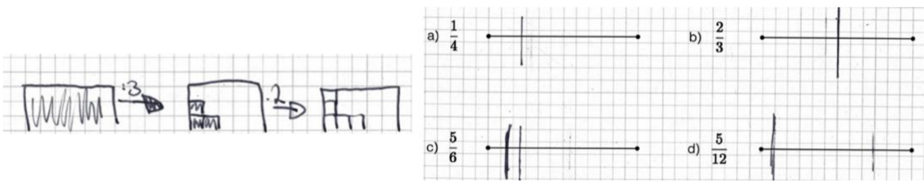

Abbildung 2: Miguels Bruchdarstellungen in einem Rechteck und einer Strecke

Fazit

Die Analyse der Bearbeitungsprozesse der Schüler(innen) beim Darstellungswechsel zur Bruchdarstellung an einer Strecke zeigt, dass bereits in der zweiten Stunde der Unterrichtseinheit sehr große Unterschiede in den individuellen Bruchkonzepten der Schüler(innen) zu finden sind. Während einige Schüler(innen) problemlos das Bruchherstellungsverfahren zur Darstellung von Brüchen an neuen Darstellungen anwenden können, haben andere dabei große Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten beruhen vor allem in unzureichenden Vorstellungen des Bruchherstellungsverfahrens oder abbildhaften Vorstellungen, die nicht in eine Herstellungshandlung übersetzt werden können. Es zeigt sich, dass der Wechsel zwischen Darstellungen nicht leicht ist und durch individuelle Faktoren beeinflusst wird. Daher ist es notwendig Darstellungswechsel nicht als natürliche Prozesse vorauszusetzen, sondern gezielt im Unterricht zu thematisieren und zu erarbeiten.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics 61(1–2)*, 103–131.

Kollhoff, S. (2017). Analyse und Rekonstruktion von Transferprozessen in Schülerinteraktionen. In: U. Kortenkamp, & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 552–555). Münster: WTM-Verlag.

Rau, M.A., & Matthews, P.G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance student's learning about fractions. In: *ZDM Mathematics Education*, 49, 531–544.

Superfine, A.C., Canty, R.S., & Marshall, A.M. (2009). Translation between external representation systems in mathematics: All-or-none or skill conglomerate? In: *Journal of Mathematical Behavior 28*, 217–236.

vom Hofe, R., & Blum (2016). „Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 37(Supplement 1)*, 225–254.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.