Thomas KROHN & Silvia SCHÖNEBURG-LEHNERT, Leipzig

Schülervorstellungen zum Logarithmus am Ende der Sek I: Nutzung des Potenzials der Didaktischen Rekonstruktion

Im folgenden Beitrag sollen erste Ergebnisse einer qualitativen Erhebung der Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums am Ende der 10. Klassenstufe zum Logarithmusbegriff, dem Rechnen mit Logarithmen, der Logarithmusfunktion und der Anwendung des Logarithmus vorgestellt werden. Diese Vorstellungen wurden im größeren Forschungsrahmen der so genannten „Didaktischen Rekonstruktion" mithilfe eines leitfadengestützten Interviews erhoben und fachwissenschaftlichen Sichtweisen auf diese Thematik gegenübergestellt. Daraus lassen sich erste Implikationen für den Mathematikunterricht ableiten.

Logarithmus und Logarithmusfunktion als Hindernis im Curriculum

Die Mathematik der Logarithmen stellt für viele Lernende seit Jahrzehnten innerhalb des Mathematikunterrichts ein großes Hindernis dar und ist ein Sinnbild für die Unverständlichkeit der Mathematik (vgl. Xylander 2008, S. 814; v. d. Waerden 1957, S. 1).

Mögliche Erklärungen hierfür reichen von der fehlenden deutschen Übersetzung des Begriffs „Logarithmus" verbunden mit fehlenden Anhaltspunkten für seine vermeintliche Bedeutung, über den vergleichsweise komplexen Zusammenhang innerhalb der kompakten Schreibweise $\log_a(b)=c$ bis hin zur inversen Begriffsfassung für das Logarithmieren über dessen Umkehrung als Potenzieren des Exponenten: $\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c=b$ (vgl. Weber 2013, S. 83–85). Gegebene Anregungen wie etwa alternative Sprech- und Schreibweisen (vgl. Gallin 2011, S. 110) haben bislang weder fachlich noch didaktisch die Erwartungen erfüllen können, wenngleich sich erste positive Effekte durch Beachtung von fünf, aus den fachlichen Hintergründen und der didaktischen Reduzierung resultierenden, zu erreichenden Grundvorstellungen (Weber 2013, siehe unten) gezeigt haben.

Untersuchungsdesign: Modell der Didaktischen Rekonstruktion

Die „Didaktische Rekonstruktion" – ein Modell aus den Naturwissenschaften – wurde explizit für die Auseinandersetzung mit Vorstellungen der Lernenden vor dem Hintergrund der konstruktivistischen Lerntheorie entwickelt (vgl. Kattmann u. a. 1997; Beziehungen zu aktuellen Forschungsfragen der Mathematikdidaktik in Prediger 2005, Anwendung etwa in Rütten 2016). Das Modell besteht aus den folgenden drei Komponenten, die jeweils von

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

den anderen abhängig sind (vgl. Kattmann 2007, S. 94ff.; Reinfried u. a. 2009, S. 407ff.):

- fachliche Klärung: Inhaltsanalyse zentraler fachwissenschaftlicher aktueller und historischer Aussagen, Theorien, Methoden und Termini,
- Erfassen der Lernerperspektive: Ermitteln individueller Lernvoraussetzungen, die die Zuschreibung von Vorstellungen gestatten,
- didaktische Strukturierung: grundsätzliche und verallgemeinerbare Ziel-, Inhalts- und Methodenentscheidungen für den Unterricht.

Ziel der Didaktischen Rekonstruktion ist es, Unterschiede, Gemeinsamkeiten und Berührungspunkte zwischen den Perspektiven herauszuarbeiten und wechselseitig in Beziehung zu setzen, um das Lehren und Lernen zu optimieren (vgl. Groß 2007, S. 43; Reinfried u. a. 2009, S. 405).

Im konkreten Fall (Stichprobe: n=10 Lernende des Gymnasiums der 10. Klasse nach Behandlung des Themengebiets Logarithmus) wurde die fachliche Klärung mittels modifizierter qualitativer Inhaltsanalyse (vgl. Gropengießer 1997) in den Schritten Zusammenfassung, Explikation und Strukturierung durchgeführt. Grundlage dafür bildeten die mathematikgeschichtlich bedeutenden Beiträge zur (Weiter-)Entwicklung des Logarithmus von Napier (1619), Euler (1788) und Klein (1924). Die Schülerperspektive wurde mittels problemzentrierten, leitfadengestützten Einzelinterviews als Tonaufnahme erfasst, transkribiert, redigiert und schließlich auch mit Hilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. In beiden Perspektiven sind die Analysefragen strukturiert nach (1) Begriff des Logarithmus, (2) Rechnen mit Logarithmen, (3) Logarithmusfunktion, (4) inner- und außermathematische Anwendung und (5) Bedeutung. Im Rahmen dieses Beitrags soll sich auf die Untersuchungsergebnisse aus fachlicher und Schülersicht zum Logarithmusbegriff beschränkt werden (für die detaillierten Untersuchungsergebnisse vgl. Friedrich 2016).

Erste Ergebnisse von Lernersperspektive und fachlicher Klärung

Die Auswertung der Perspektiven der Lernenden hat eine große Bandbreite an unterschiedlichen Auffassungen ergeben, wobei bei keinem Lernenden nach Behandlung des Themengebiets – gemessen an den Vorgaben der Lehrbücher – eine vollständig korrekte Vorstellung vom Logarithmusbegriff und seinen Eigenarten nachgewiesen werden konnte. Gemeinsam ist bei allen, dass der Logarithmus mit dem Exponenten in Relation gebracht wird, wobei die grundlegende Vorstellung von einer spezifischen Zahl (der Exponent als Objekt), über den gesamten Rechenausdruck (die Gleichung $\log_a(b)=c$) bis hin zur Umkehrfunktion des Potenzierens reicht. Dabei kann von allen Lernenden die Basis korrekt als solche benannt werden, die anderen Termini mit großer Mehrheit nicht oder falsch. Hinsichtlich der Einschränkungen für Numerus, Basis und Logarithmus gibt es unter der Lernenden keine völlig korrekte Vorstellung, jedoch erinnert sich die Mehrheit an vermeintlich markante Werte wie 0 oder 1.

So ambivalent wie die Vorstellungen der Lernenden zum Logarithmus sind auch die Ergebnisse der fachlichen Klärung, die auf den drei o.g. historischen Quellen basieren. Bei Napier als einem der Erfinder des Logarithmus findet sich als herauszustellender Punkt äußerst anschaulich der grundlegende, dem Logarithmus innewohnende fundamentale Zusammenhang der Zuordnung von Werten einer geometrischen Reihe zu Werten einer arithmetischen Reihe. Euler hingegen gibt die Begriffsklärung über die heute noch übliche Umkehrung: Mit $c=a^b$ gilt, dass der Logarithmus der Exponent b derjenigen Potenz einer Basis a ist, welche der Zahl c gleich ist. Dabei benennt er a als Wurzel, später Basis, c als Zahl und b als Exponent. Auch zur Einschränkung der Basis als größer als 1 äußert er sich. Letzteres präzisiert Klein später, dass die Basis stets größer als 0 sein müsse und der Numerus nur positive Werte annehmen dürfe. Den Hauptaspekt von Klein stellt jedoch die funktionale Sichtweise auf den Logarithmus dar; derart, dass der Logarithmus zur Basis b der von $y=1/x$ zwischen $x=1$ und $x=b$ umschlossene Flächeninhalt ist.

Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen der Lernenden: Zusammenführen der Erkenntnisse der Didaktischen Rekonstruktion

Als Implikation für die didaktische Strukturierung zeigt sich damit, dass in derzeitigen Lehrbüchern die Einführung des Logarithmus mit beginnender Begriffsbildung und Diskussion der Eigenschaften fast ausschließlich über die maßgeblich auf Euler zurückgehende) Umkehrung des Potenzierens $\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c=b$ geschieht. Durchaus mit gewinnbringenden Effekten für die Lernenden: So lassen sich die wichtige Vorstellung des Gegenspielers (vgl. Weber 2013, S. 90ff.) und auch Rechengesetze recht einfach ableiten sowie Einschränkungen für Basis, Numerus und Logarithmus begründen.

Letzteres lässt sich ebenso durch die von Klein betonte reell-funktionale Sichtweise anschaulich entdecken. Für ein vertieftes Verständnis von der charakteristischen Vorstellung des Herabsetzens der Rechenoperation (vgl. ebd.) kann die prinzipielle Transformationsidee von Napier helfen, für die Vorstellung des logarithmischen Wachstums daneben auch Kleins Interpretation und Veranschaulichung des Logarithmus als Hyperbelfläche.

Die Ergebnisse der Didaktischen Rekonstruktion legen also nahe, dass eine Einbeziehung aller drei aus den historischen Quellen abgeleiteten Sichtweisen im Mathematikunterricht helfen kann, den Lernenden die verschiedenen oben angeführten Aspekte des Logarithmus nahe zu bringen. Auf diese Weise erwerben die Schülerinnen und Schüler ein strukturelles und vertieftes Verständnis der verschiedenen Facetten der Thematik.

Literatur

Euler, L. (1788): Einführung in di Analysis des Unendlichen […] von Johann Andreas Christian Michelsen, Band 1, Berlin: Hesse.

Klein, F. (1924): Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus – Erster Band: Arithmetik, Algebra, Analysis, Berlin: Springer.

Napier, J. (1619): Mirifici logarithmorum canonis descriptio […], Edinburgh: Hart.

Friedrich, P. (2016): Schülervorstellungen zum Logarithmus – ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion. Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Leipzig.

Gallin, P. (2011): Mathematik als Geisteswissenschaft – der Mathematikschädigung dialogisch vorbeugen. In: Helmerich, M. u. a. (2011)[Hrsg.]: Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg, S. 105-116.

Gropengießer, H. (1997): Schülervorstellungen zum Sehen. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, Nr. 3 (1997), S. 71-87.

Groß, J. (2007): Biologie verstehen: Wirkungen außerschulischer Lernangebote, Oldenburg: DZ Carl von Ossietzky.

Kattmann, U. (1997): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 3 (1997), 3, S. 3-18.

Kattmann, U. (2007): Didaktische Rekonstruktion – eine praktische Theorie. In: Krüger, D. / Vogt, H. (2007): Theorien in der biologiedidaktischen Forschung – Ein Handbuch für Lehramtsstudenten und Doktoranden, Berlin: Springer, S. 93-104.

Prediger, S. (2005): „Auch ich will Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. In: mathematica didactica, 28(2), 23-47.

Reinfried, S./ Mathis, C./ Kattmann, U. (2009): Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Eine innovative Methode zur fachdidaktischen Erforschung und Entwicklung von Unterricht. In: Beiträge zur Lehrerbildung, Nr. 27 (2009), 3, S. 404-414.

Rütten, C. (2016): Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen – Metaphernanalytisch orientierte Erkundungen im Rahmen didaktischer Rekonstruktion, Wiesbaden: Springer.

v. d. Waerden, B: L: (1957): Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht. In: Elemente der Mathematik (12), S. 1-7.

Weber, C. (2013): Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In: Allmendinger, H. u. a. (2013)[Hrsg.]: Mathematik verständlich unterrichten, Wiesbaden: Springer, S. 79-98.

Xylander, B. (2008): Verständnisintensives Lernen im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, Münster: WTM, S. 813–816.