

Prinzipien des genetischen Konstruktivismus

Die Methode, welche Professor Milan Hejný seit mehr als 40 Jahren entwickelt, und die ich als *genetischer Konstruktivismus* bezeichnen möchte, ist eine Synthese von mehreren Prinzipien. Auch wenn jedes dieser Prinzipien von anderen Autoren schon formuliert wurde, im Rahmen des genetischen Konstruktivismus potenzieren sie sich gegenseitig und formen ein sehr wirksames System. Die Methode wird heute an mehr als 750 von insgesamt 4100 Grundschulen in der Tschechischen Republik verwendet.

1. Das Prinzip der epistemischen Nähe der Mathematik

Philosophen der Vergangenheit wie Platon, Descartes, oder Kant formulierten Theorien die die Unmittelbarkeit der mathematischen Erfahrung erklären versucht. Wir müssen uns nicht für eine dieser Theorien entscheiden, es genügt, dass wir die epistemische Nähe der Mathematik anerkennen. Die Mathematik ist der unmittelbaren Erfahrung zugänglich, und authentisches mathematisches Wissen entsteht aus eigener Erfahrung.

Im genetischen Konstruktivismus darf der Lehrer das mathematische Wissen den Schülern *nicht* vorführen. Er soll *Probleme vorlegen* und *Fragen stellen*. Die Schüler sollen die Mathematik selber entdecken. Dies haben schon George Polya und Ernst von Glasersfeld betont.

2. Das Prinzip der ontologischen Verbindlichkeit der Mathematik

Andere Denker, wie Aristoteles, Galileo, Wiegner, oder Arnol'd haben an die enge Beziehung zwischen Mathematik und der Wirklichkeit aufmerksam gemacht. Ich zitiere: *Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (Arnol'd, Paris, 7. März 1997)

Der Lehrer darf *nicht* die Schüler auf ihre Fehler aufmerksam machen. Die Schüler sollen die Fehler selber entdecken und im gemeinsamen Dialog gegenseitig korrigieren. *Keine Autorität*, nur die Wirklichkeit soll sie belehren. Dass etwas falsch ist, heißt nicht, dass es der Autorität nicht gefällt, sondern dass es der Wirklichkeit widerspricht. Die Beziehung zur Wirklichkeit im Lernen der Mathematik hat schon Hans Freudenthal betont.

3. Das Prinzip der instrumentalen Verankerung der Mathematik

Man kann auch ohne Zahlen Arithmetik betreiben. Zwei fünfstellige Zahlen kann man multiplizieren, wenn man auf ein Feld zwei senkrechte Geraden zieht. An eine Gerade legt man Bohnen deren Anzahl der ersten Zahl

gleich, an die andere Bohnen deren Anzahl der zweiten Zahl gleich, und das Ganze zu einem Rechteck ausfüllt. Aber dies würde einen Menschen *mehr als drei Jahre* dauern. Mit Hilfe des positionellen Dezimalsystems kann man das Produkt in wenigen Minuten finden. Das zeigt die Stärke dessen, was Sibylle Krämer *symbolische Maschine* nannte (Krämer 1988).

Der genetische Konstruktivismus legt großen Wert darauf, *die Arbeit mit den Instrumenten nicht mit der Mathematik zu verwechseln*. Deshalb erfahren die Schüler denselben mathematischen Inhalt in mehreren, so genannten *Umwelten*, so dass sie die mathematischen Inhalte nicht mit dem Regeln der eigentlichen Instrumente verwechseln. Die Idee der mathematischen Umwelten wurde von Erich Witmann eingeführt.

4. Das Prinzip der sozialen Verankerung der Mathematik

Bourbaki hat in seinem Aufsatz *La Mathématique ou les Mathématiques* die Frage der Einheit der Mathematik formuliert und mit dem Hinweis auf das Beweisen beantwortet. Es ist der Beweis dem die Mathematik ihre Einheit verdankt. Árpád Szabó hat darauf hingewiesen, dass Termine wie Hypothese, oder Axiome, aus der Dialektik stammen. Hans-Niels Jahnke hat die Ideen von Szabó in einen didaktischen Kontext gebracht.

Im genetischen Konstruktivismus ist die Schulmathematik nicht in Arithmetik, Geometrie, und Algebra unterteilt, sondern als etwas Einheitliches erlebt. Dies geschieht im Problemlösen, Argumentieren und Beweisen. Die Schüler müssen sich über Richtigkeit ihrer Lösungen gegenseitig überzeugen und sie verwenden z. B. in der Arithmetik geometrische Argumente. Was ein legitimes Argument ist, müssen die Schüler selbst entscheiden.

5. Das genetische Prinzip

Das genetische Prinzip betrachtet historisches Material nicht als Ornament, um ein fertiges Lehrbuch zu schmücken, sondern als Arbeitsmethode, das Lernstoff festzulegen. Der Aufbau des Stoffes und die Auswahl der Aufgaben folgt die genetische Ordnung ihres historischen Entdeckens. Die Begriffe werden nicht einfach eingeführt, sondern Schritt bei Schritt gebildet.

In jedem Stoffteil muss der Lehrer Aufgaben finden, die für die begabten Schüler interessant sind, aber gleichzeitig auch Aufgaben, die für die schwachen eine Ausforderung bedeuten. Die genetische Methode wurde von Otto Toeplitz formuliert und von Gert Schubring ausgeführt.

6. Das formative Prinzip

Die Debatte über dem Status des mathematischen Wissens und über den demokratischen Prinzipien des Zusammenlebens von Menschen fallen zu-

sammen. Es mag kein Zufall sein. Die Debatte über dem epistemischen Status der Mathematik bei Plato oder Aristoteles ist gleichzeitig eine Debatte über dem Standarden des logischen Argumentierens und vor allem über die Grenze zwischen Argumentation und Demagogie.

Im genetischen Konstruktivismus stellt man großen Wert auf die formative Rolle der Mathematik, vor allem daran, dass: **1.** Auch *den schwächeren Schülern* das Erlebnis der Freude am intellektueller Arbeit zu geben. **2.** *Die Angst vom Fehler* abzubauen und zu zeigen, dass der Fehler der Anfang des Suchens nach den Ursachen und eines neuen Lernprozesses sein kann. **3.** Das Erlebnis der Freude am *Erfolg des Mitschülers* zu geben. **4.** Das Unterschied zwischen *Demagogie und Argumentation* erkennen zu lernen. **5.** Den Schülern eine Kultur der *freundlichen Diskussion* erleben zu lassen.

7. Genetischer Konstruktivismus vs. die mathematischen Kompetenzen

Das Prinzip der ontologischen Verbindlichkeit der Mathematik – es ist wichtig, dass es immer die Konfrontation mit der Wirklichkeit und nicht die Autorität des Lehrers entscheidet, was falsch und was richtig ist. In der Orientierung auf die Kompetenzen sehe ich eine Gefahr, dass der Lehrer nicht widerstehen wird, den Schülern zu sagen, was von ihnen als Lösung erwartet wird. So geht die Mathematik ins Bereich der sozialen Verbindlichkeit über; es geht dann vielmehr um das Befriedigen der Autorität als um die Wirklichkeit selbst.

Das Prinzip der instrumentalen Verankerung der Mathematik – die klassische Didaktik verletzt dieses Prinzip, wenn sie das ***Beherrschen*** einiger Instrumente an die Stelle des Erforschens der durch diese Instrumente zugänglicher Wirklichkeit stellt. Diese Tendenz wird mit den Kompetenzen noch verstärkt. Schon das Wort *Kompetenz* betont eine Bereitschaft zur unmittelbaren Antwort betont. Das Prinzip der instrumentalen Verankerung sagt im Gegensatz, dass ein Instrument nur ein Werkzeug ist, und zur Mathematik gehören nur die Inhalte, die mit dem Instrument zu entdecken sind, und nicht das Instrument selbst.

Das Prinzip der sozialen Verankerung der Mathematik – der Schüler muss lernen seine Mitschüler von seiner Wahrheit überzeugen. Die Kompetenzorientierung drängt diese argumentative Fähigkeit in den Hintergrund und betont eher die performative Fähigkeit, das Problem und seine Lösung dem Lehrer vorzuführen oder beim Test niederzuschreiben. Überzeugen muss man eigentlich niemanden. Nicht mal sich selbst. Man muss wissen, was von einem erwartet wird und diesen Erwartungen zu genügen.

Das genetische Prinzip – sicher kann der Didaktiker die Probleme an Hand derer er die mathematische Kompetenz definiert mit Hilfe der Geschichte

auswählen; ebenso wie er diese Probleme mit Hilfe verschiedener Instrumente formulieren kann, so, dass er sich nicht gegen die instrumentale Verankerung und das genetische Prinzip versündigt. Aber eigentlich widerspricht dies dem Geiste der Kompetenzen, welche an ein gegebenes Instrument gebunden sind (welches in der Praxis gebraucht wird) und an die Leistung hier und jetzt (und nicht an die historische Genese) gerichtet sind.

Das formative Prinzip – auch wenn der kompetenzorientierte Unterricht didaktisch erfolgreich wäre (was nicht klar ist – siehe Kaenders und Weiss 2017), verletzt er das Wichtigste, was die Mathematik der Gesellschaft anzubieten hat. Die Kultur des kritischen Denkens und rationalen Argumentierens ist viel wichtiger als das Aneignen von faktischen Wissen. Die Kompetenzen stehen im Gegenteil zu dieser Kultur und deswegen sind sie für die Gesellschaft nicht wünschenswert.

Dank

Die Arbeit auf diesem Aufsatz wurde in Rahmen *Progres Q17* Lehrervorbereitung und Lehrberuf im Kontext von Wissenschaft und Forschung.

Literatur

- Arnol'd, V. (1998): On teaching Mathematics. *Russian Math. Surveys* 53, 229-234.
- Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel.
- Glaserfeld, E. von (1981): Einführung in den Radikalen Konstruktivismus. In: Watzlawick, P. (ed.): *Die Erfundene Wirklichkeit*. München, Piper, 16-38
- Jahnke, H.-N. (2014): History in Mathematics Education. A Hermeneutic Approach. In: M. N. Fried, T. Dreyfus (eds.): *Mathematics and Mathematics Education: Search for Common Ground*. Springer, Dordrecht, 75-88.
- Kaenders, R. und Weiss, Y. (2017): Mathematische Schneeschmelze. *Mitteilungen der DMV* 2017/2, 82-89.
- Krämer, S. (1988): Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in genetischem Abriss. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Polya, G. (1945): *How to solve it?* Princeton University Press, Princeton.
- Schubring, G. (1978): *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Klett, Stuttgart.
- Toeplitz, O. (1949): *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Aus dem Nachlass herausgegeben von Dr. G. Koethe. Springer Verlag, Berlin.
- Wittmann, E. (2001): Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* 48, 1-20.