

Eigenschaften von Operationen erkennen und nutzen – Qualitative Analyse im Projekt FeDeR

1. Theoretischer Hintergrund

Im Rahmen des Projekts ‚Förderung und Diagnose in differenten Rahmenbedingungen‘ wurden Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses entwickelt. Die Hauptforschungsfrage des Projekts ist es, herauszufinden, welche Form der Förderung für Kinder mit Förderbedarf effektiv ist (Lamprecht, 2017). Deswegen wurde das Konzept in unterschiedlichen Settings erprobt: In der Einzelförderung (Setting A) und im Klassenverband (Setting B) wurden speziell konzipierte Lernumgebungen eingesetzt; in den Kontrollgruppenklassen (Setting C) fand der Regelunterricht zur Multiplikation statt.

Der Umgang mit Darstellungsformen ist wesentlich für ein Multiplikatives Verständnis (Lamprecht, 2016). Übersetzungsprozesse zwischen Darstellungsformen werden als Indikator für Verstehensprozesse angesehen (z. B. Bönig, 1995; Kuhnke, 2013; Wartha & Schulz, 2012). Die konzipierten Lernumgebungen enthalten somit Aufgaben, die den Wechsel der Darstellungsformen erfordern. Auch in der qualitativen Analyse stehen die Übersetzungsprozesse im Fokus der Interpretation.

2. Fokus der qualitativen Analyse

Aufgrund des vielfältigen Datenmaterials wird für die qualitative Analyse ein inhaltlicher Fokus auf Ausschnitte der Fördersitzungen (Setting A) bestimmt: Nutzung und Erkennen von Distributivität. Um Übersetzungsprozesse von der Symbolform in Darstellungen von didaktischem Material zu fördern, werden in der Fördersitzung Summen- bzw. Differenzprodukte in symbolischer Schreibweise in die Darstellung des Punktefelds eingezeichnet. Folgende Forschungsfrage soll mit der qualitativen Analyse beantwortet werden:

Wie wird das Förderangebot bezüglich des Erkennens und der Nutzung der Eigenschaft der Distributivität von den Kindern angenommen?

3. Fallbeispiel ‚Lara‘

Exemplarisch wird in diesem Beitrag ein Ausschnitt der Förderung mit Lara betrachtet. Lara zeigte im Test zum Multiplikativen Verständnis in verschiedenen Aufgaben Förderbedarf. Deswegen wurde sie zur Einzelförderung eingeladen. Sie ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung acht Jahre alt

und besucht eine Klasse mit 19 Kindern einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Um wesentliche Förderbedarfe in anderen, arithmetischen Kompetenzen möglichst auszuschließen, wurde der standardisierte Test BIRTE 2 (Schipper, Wartha, & von Schroeders, 2011) durchgeführt. Lara zeigt in diesem Test insgesamt eine durchschnittliche Leistung und ihre Arbeitsgeschwindigkeit ist hoch. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe ca. zwei Wochen lang statt. Es werden vier individuell angepasste Sitzungen von je ca. 45 Minuten durchgeführt. Lara ist während der Sitzungen sehr aufgeweckt, kommunikativ und motiviert.

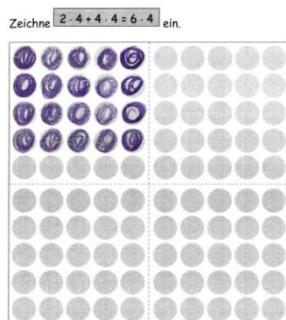


Abbildung 1:
Laras Bearbeitung
im Pretest

In der zum Analysefokus passenden Testaufgabe $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$ hat Lara ein $4 \cdot 5$ -Punktefeld farbig markiert (Abb.1). Es kann interpretiert werden, dass Lara bereits eine rechteckige Punktefelddarstellung für Produkte kennt. Das eingezeichnete Punktefeld passt jedoch nicht zur gestellten Aufgabe. Lediglich der Faktor 4 kommt sowohl in Laras Zeichnung als auch in der Aufgabenstellung vor. Dies könnte darauf hindeuten, dass Lara das Summenprodukt $6 \cdot 4$ einzeichnen wollte und sich dabei beim Faktor 6 verzählt hat. Die gewünschte Bearbeitung bei der die Teilprodukte $2 \cdot 4$ und $4 \cdot 4$ deutlich werden, ist nicht erkennbar.

Bei einer derartigen Aufgabe sind anspruchsvolle mentale Prozesse erforderlich, die sich der Beobachtung entziehen. Zunächst müssen die beiden Teilprodukte identifiziert werden. Außerdem ist es relevant, den gleichbleibenden und den zu addierenden Faktor zu erkennen. Der Bearbeitungsprozess enthält verschiedene Elemente mit jeweiligen Herausforderungen an das Kind. Um eine Strukturierung des Terms und die Identifikation der Produkte zu unterstützen, ist eine Idee der Förderung, zur Unterscheidung der Teilprodukte zwei verschiedene Farben zu verwenden (Abb. 2). Beim *Einzeichnen der Teilprodukte* ist es wichtig, welche Faktoren als Zeilen und welche als Spalten eingezeichnet werden. Dies muss bei beiden Teilprodukten jeweils einheitlich sein, da sonst die Distributivität nicht deutlich gemacht werden kann. Beim *Bestimmen des Summenprodukts* muss verstanden werden, dass dem Summenprodukt das markierte Punktefeld bestehend aus den Feldern der Teilprodukte entspricht. Das Summenprodukt kann somit in der Punktefelddarstellung ‚abgelesen‘ werden. Bei der *Ergebnisermittlung* können die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisfindung genutzt wer-

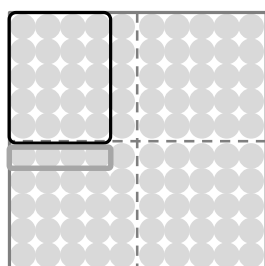


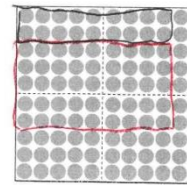
Abbildung 2:
 $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4$
im Punktefeld
eingezeichnet

den. Bei der *Ergebnisermittlung* können die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisfindung genutzt wer-

den. Eine weitere Möglichkeit ist es natürlich, das Summenprodukt direkt zu berechnen.

Zeichne die Aufgaben ein
und rechne aus.
 $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$

$$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 7 \cdot 9 = 63$$



-
- 19 L 7 mal (9.) (unv.) Und 7/ (2 mal/) (unv.) [L umrahmt mit dem Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte] Plus. 5 mal 9.
-
- 20 I Mhm (bejahend).
-
- 21 L [L nimmt den Buntstift zur Hand und rahmt damit in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte ein] [L legt den Buntstift beiseite, nimmt den Bleistift zur Hand und zählt damit die umrahmten Punkte der ersten Spalte] 7. [L schreibt 7 hinter die Aufgabe und blickt kurz auf das Punktefeld] Mal 9 ist gleich? [L schreibt $\cdot 9 =$ hinter 7] 63.
-
- 22 I Perfekt. [I greift in Richtung Buntstift]
-
- 23 L [L schreibt 63 hinter $=$] So. [L legt den Bleistift beiseite] Fertig.

Abbildung 3: Transkript-Ausschnitt aus einer Fördersitzung mit Lara

Im ausgewählten Ausschnitt der Förderung (Abb. 3) nennt Lara zu Beginn vermutlich bereits das Summenprodukt (Sprechbeitrag (SB) 19). Dies könnte darauf hindeuten, dass sie auf die symbolische Darstellung fokussiert und es möglicherweise in dieser Darstellungsform schon verstanden hat. Sie murmelt vermutlich ‚2 mal 9‘ (SB 19) und markiert links oben im Hunderterpunktefeld selbstständig ein passendes Punktefeld zum ersten Teilprodukt $2 \cdot 9$ (SB 19) mit Bleistift. Sie sagt ‚Plus. 5 mal 9‘ (SB 19) und markiert mit Buntstift ein passendes Punktefeld zum zweiten Teilprodukt $5 \cdot 9$ direkt unter der ersten Markierung ohne Hilfestellung (SB 21). Sie hat die Förderidee aufgegriffen, dass die verschiedenen Farben jeweils für das Einzeichnen der Punktefelder für die zwei Teilprodukte eingesetzt werden. Lara nennt das Ergebnis sofort und schreibt es auf (SB 21, 23). Dies weist darauf hin, dass sie die Lösung der Aufgabe $7 \cdot 9$ bereits auswendig kennt. Diese Vermutung wird gestützt durch die Selbstauskunft der Lehrkraft. Dort wird das 7er- und 9er-Einmaleins als Themen für Unterrichtsstunden aufgeführt, die vor der hier analysierten Fördersitzung stattgefunden haben. Eine andere Deutungsmöglichkeit ist es, dass Lara während des Einzeichnens die Teilprodukte im Kopf berechnet und diese addiert.

In Laras Bearbeitung im Post-Test (Abb. 4), der nach der Einzelförderung durchgeführt wurde, wird ersichtlich, dass die Teilprodukte passend direkt untereinander eingezeichnet wurden, so dass das Summenprodukt sofort ‚ablesbar‘ ist. Lara verwendet sogar, wie in der Einzelförderung intendiert, zwei verschiedene Farben für die Teilprodukte.

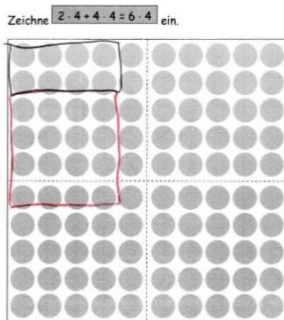


Abbildung 4:
Laras Bearbeitung
im Post-Test

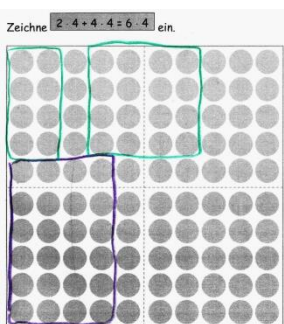


Abbildung 5:
Laras Bearbeitung
im Follow-up-Test

In Laras Bearbeitung im Follow-up-Test (Abb. 5) sind die Teilprodukte nebeneinander mit jeweils derselben Farbe eingezeichnet, wobei dazwischen eine Spalte Platz gelassen wurde. Der erste Faktor 2 des ersten Teilprodukts wird als Spalten interpretiert, der zweite Faktor 4 als Zeilen. Beim zweiten Teilprodukt kann man dies nicht zuordnen, da beide Faktoren gleich sind. Das Summenprodukt hat Lara in einer anderen Farbe darunter eingezeichnet, wobei sie dort (im Unterschied zum ersten Teilprodukt) den ersten Faktor 6 als Zeilen und den zweiten Faktor 4 als Spalten interpretiert. Das heißt Lara zeichnet jeweils die Teilprodukte und das Summenprodukte passend im Punktefeld ein, die Gleichheit von linkem und rechtem Term wird durch diese Darstellung nicht direkt deutlich. Im Vergleich zu ihrer Bearbeitung im Pre-Test sind im Post- und Follow-up-Test beachtliche Lernfortschritte festzustellen. Im Post-Test zeigt sie eine passende Bearbeitung, bei der auch die Teilprodukte deutlich werden. Im Follow-up-Test sind die Teilprodukte und das Summenprodukt jeweils erkennbar, sie ist also in der Lage, die Produkte zu sehen. Die Farben nutzt sie hier individualisiert.

Literatur

- Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Münster: Waxmann Verlag GmbH.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Lamprecht, X. (2016). Multiplikatives Verständnis fördern – Einblicke in das Projekt FeDeR. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, Band 2* (S. 617–620). Münster: WTM-Verlag.
- Lamprecht, X. (2017). „Sich Multiplikation vorstellen“ – Individuelle Grundvorstellungen von Kindern mit und ohne Förderbedarf. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag.
- Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2 - Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr. Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr/Handbuch mit CD-ROM (BIRTE 2)*. Braunschweig: Schroedel.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenprobleme vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100*. Berlin: Cornelsen.