Edith LINDENBAUER, Linz

Interaktive Arbeitsblätter im Kontext von Schüler- und Schülerinnenvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten in der Sekundarstufe 1

Problemlage

Funktionales Denken ist ein wichtiges Konzept im Mathematikunterricht. Vollrath (1989) nennt verschiedene Aspekte funktionalen Denkens, von denen für das vorliegende Forschungsprojekt insbesondere der Zuordnungsaspekt und der Kovariationsaspekt relevant sind. Der Zuordnungsaspekt repräsentiert eine statische Perspektive des funktionalen Denkens, während der Kovariationsaspekt dynamische Prozesse umfasst.

In der Literatur werden vielfältige Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Arbeiten mit Funktionen angeführt: (i) Graph-als-Bild Fehler: Schülerinnen und Schüler interpretieren Funktionsgraphen als photographisches Abbild einer Realsituation (Clement, 1989); (ii) Illusion of linearity: Bevorzugung linearer oder direkt proportionaler Modelle auch wenn diese nicht geeignet sind (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2002); (iii) Slope-height confusion: Verwechslung von Steigung und Funktionswert an einer Stelle, die unter anderem zu Problemen bei der Interpretation von Zeit-Weg-Diagrammen führt (Clement, 1989). Diese Schwierigkeiten können zu Fehlinterpretationen von Funktionen und insbesondere von Funktionsgraphen führen.

Vogel (2007) betont, dass die Verwendung von verschiedenen Darstellungen (z. B. Graphen, situative Darstellungen, Tabellen) Aspekte funktionalen Denkens betonen und somit Lernende beim Interpretieren von funktionalen Abhängigkeiten und deren Graphen unterstützen können. Andererseits beeinflussen diese Darstellungen die Wahrnehmung und können damit das Denken der Lernenden einschränken (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006).

Dynamische verknüpfte Repräsentationen

Forschungsergebnisse in Bezug auf den Einsatz von Technologie im Unterricht zeigen oft nur geringe positive Effekte auf die Leistungen von Lernenden (Drijvers et al., 2016). Ergebnisse bezüglich dynamischer Repräsentationen sind vielversprechender, da diese Lernende bei Begriffsbildungsprozessen unterstützen können (Hoyles, Noss, Vahey, & Roschelle, 2013).

Dynamische Mathematiksoftware (DMS) wie zum Beispiel GeoGebra ermöglicht es, in verschiedenen Ansichten unterschiedliche Repräsentationen desselben mathematischen Objekts anzuzeigen. Das Potenzial der neuen

Technologie liegt darin, diese Repräsentationen dynamisch so miteinander zu verbinden, so dass sich das Ändern einer Repräsentation unmittelbar auf die andere(n) Darstellung(en) auswirkt (Moreno-Armella, Hegedus, & Kaput, 2008). Die Verwendung von DMS bietet somit die Möglichkeit, funktionale Aspekte durch interaktive Darstellungen zu betonen und die Entwicklung funktionalen Denkens zu fördern (Barzel & Greefrath, 2015).

Folgende Fragen stehen im Zentrum des Forschungsinteresses:

(1) Welche Vorstellungen haben Schüler/innen der Sekundarstufe 1 (7./8. Schulstufe) im Zusammenhang mit funktionalem Denken?

(2) Welchen Einfluss haben dynamische Arbeitsblätter auf die Vorstellungen von Schüler/innen der Sekundarstufe 1 in diesem Bereich?

(3) Wie sollten dynamische Arbeitsblätter gestaltet werden, um Schüler/innen der Sekundarstufe 1 darin zu unterstützen, geeignete mathematische Vorstellungen zu entwickeln?

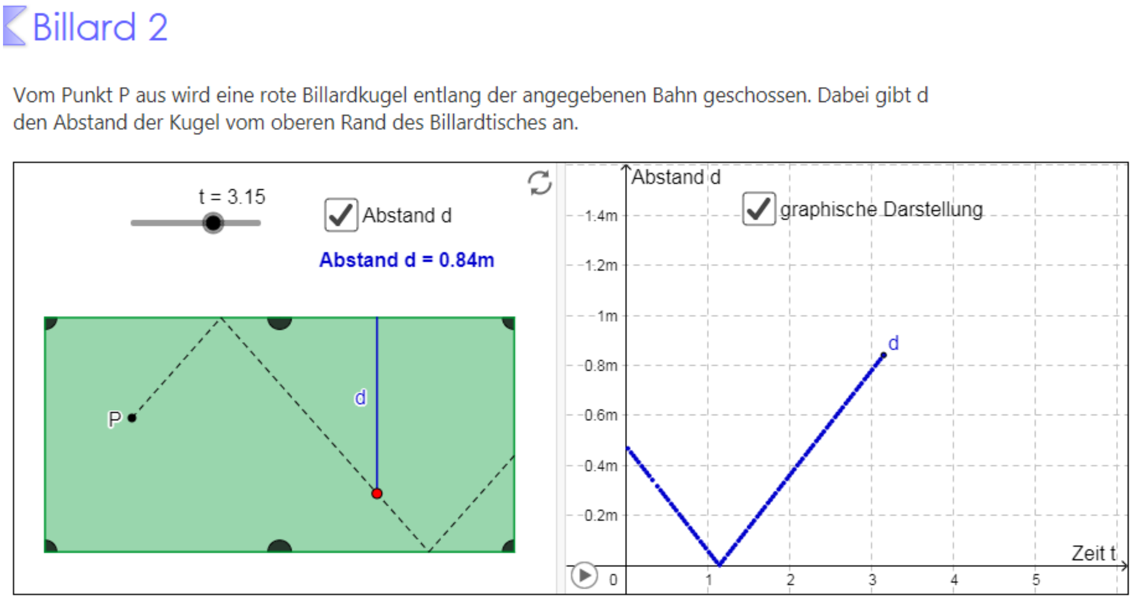
Die ersten beiden Fragen werden empirisch im Rahmen einer hypothesengenerierenden Fallstudie, die Elemente der Grounded Theory integriert, behandelt (Eisenhardt, 1989; Details zum Forschungsdesign siehe Lindenbauer & Lavicza, 2017). Aus Platzgründen konzentriert sich dieser Artikel nur auf die theoriebasierte Beantwortung der dritten Forschungsfrage, die nach Auswertung der Daten durch empirische Ergebnisse ergänzt werden soll.

Interaktive Arbeitsblätter

Basierend auf in der Literatur beschriebenen Aufgaben zu typischen Schwierigkeiten wurden in Rahmen dieser Studie interaktive Arbeitsblätter entwickelt, die unter https://ggbm.at/EFVg7W8V eingesehen werden können.

Aufgrund des Vorwissens jener Lernenden, die in der Studie beteiligt waren, thematisieren die Arbeitsblätter den Darstellungswechsel zwischem (ikonischen) Situationsmodell und grafischer Repräsentation, der laut Forschungsergebnisse besonders problematisch ist (Bossé, Adu-Gyamfi, & Cheetham, 2011). Um die Zusammenhänge zwischen den beiden Darstellungen zu betonen, werden diese dynamisch miteinander verknüpft. Es erfolgt dabei eine automatische Übersetzung, damit sich die Lernenden jeweils auf die ergänzenden Informationen der einzelnen Darstellungen konzentrieren können.

Das folgende GeoGebra-Applet (siehe https://ggbm.at/wt3cKeXr) enthält sowohl eine Situationsdarstellung als auch eine Grafikansicht mit dem zugehörigen Funktionsgraphen. Durch eine entsprechende Umsetzung haben Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, zuerst nur die Bewegung der Billardkugel zu betrachten und anschließend eine Hypothese über den Verlauf des Funktionsgraphen zu bilden, der den Abstand der Billardkugel vom oberen Rand des Tisches im Zeitverlauf angibt.



Bei der Gestaltung wurden verschiedene Designkriterien und -prinzipien (z. B. Clark & Mayer, 2011) berücksichtigt.

- Räumliches und zeitliches Kontiguitätsprinzip meint die gleichzeitige Darstellung von Informationen sowie die Vorgehensweise, zusammengehörige Objekte nahe beieinander zu platzieren oder Verbindungen herstellen. In den interaktiven Arbeitsblättern wurde dieses Prinzip einerseits durch verknüpfte Darstellungen realisiert. Andererseits wurden Repräsentationen des gleichen mathematischen Objekts gleich gefärbt (z. B. alle mit der abhängigen Variable d verbundenen Objekte im Arbeitsblatt „Billard 2“) oder beispielsweise beide Darstellungen visuell mit Linien verbunden (siehe Applet „Hügel“: https://ggbm.at/oIg0Ksx4).
- Segmentierungsprinzip: Informationen sollen in Form von lernergesteuerten Abschnitten präsentiert werden, damit Schülerinnen und Schüler in ihrer eigenen Geschwindigkeit arbeiten können. Dazu wurden Schieberegler, Zugmodus, Start/Stopp Tasten sowie Kontrollkästchen zum Anzeigen/Verbergen von Repräsentationen verwendet.
- Multiple Darstellungen: In den interaktiven Arbeitsblättern werden immer zwei verknüpfte Darstellungen im Sinne einer *einschränkenden Funktion* nach Ainsworth (1999) verwendet. Damit meint man die Verwendung einer vertrauten oder einfacheren Darstellung (z.B. Situationsmodell) um das Lernen oder Verstehen einer zweiten, komplexeren Darstellung (z. B. Funktionsgraph) zu unterstützen.

- Das Gesetz der Geschlossenheit bezieht sich auf die Tendenz, Figuren in einer vollständigen Form wahrzunehmen (Metzger, 1975). Es ermöglicht Lernenden, die graphische Darstellung einer stetigen Funktion im Spurmodus als kontinuierliche Kurve wahrzunehmen.

Literatur

Ainsworth, S. (1999). The function of multiple representations. Computers & Education, 33(2-3), 131–152.

Barzel, B., & Greefrath, G. (2015). Digitale Werkzeuge sinnvoll integrieren. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, & A. Roppelt (Hrsg.), Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II (S. 145–157). Braunschweig: Westermann.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. International Electronic Journal of Mathematics Education, 6(3), 113–133.

Clark, R., & Mayer, R. (2011). E-learning and the science of instruction. San Francisco: John Wiley & Sons.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1–2), 77–87.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. Educational Studies in Mathematics, 50(3), 311–334.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). Uses of technology in lower secondary mathematics education. Cham: Springer International Publishing

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. Academy of Management Review, 14(4), 532–550.

Hoyles, C., Noss, R., Vahey, P., & Roschelle, J. (2013). Cornerstone Mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling. ZDM – International Journal on Mathematics Education, 45, 1057–1070.

Lindenbauer, E., & Lavicza, Z. (2017). Using dynamic worksheets to support functional thinking in lower secondary school. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (S. 2587–2594). Dublin: DCU Institute of Education and ERME.

Metzger, W. (1975). Gesetze des Sehens (3. Aufl.). Frankfurt: Verlag W. Kramer.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. Educational Studies in Mathematics, 68(2), 99–111.

Vogel, M. (2007). Multimediale Unterstützung zum Lesen von Funktionsgraphen. Mathematica Didactica, 30(7), 3–28.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10, 3–37.

Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2006). Examining mathematics learning from a conceptual change point of view. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts, & S. Vosniadou (Hrsg.), Instructional Psychology: Past, Present, and Future Trends (S. 55–70). Amsterdam: Elsevier.