Wolfram MEYERHÖFER, Paderborn

Verständnis – Ein Ansatz zur *begrifflichen* Erschließung mathematischer Inhalte

Dieser Text entstand im Rahmen des Minisymposiums „Stellenwertverständnis und verständiges Rechnen“. Was wird im derzeitigen deutschen mathematikdidaktischen und schulischen Diskurs unter „Verständnis“ verstanden?

1. Lehrer/innen und auch Student/innen meinen mit Verstehen technisches Können. Einen mathematischen Gegenstand verstanden haben heißt für sie, dass man die zugehörigen Aufgaben lösen kann.
2. Zumindest implizit weit verbreitet ist der Ansatz, Verstehen bestünde in der Fähigkeit, verschiedene Repräsentationen eines Gegenstandes ineinander zu übersetzen.
3. Ich werbe hier für einen Ansatz, der Verstehen als die begriffliche Durchdringung eines Gegenstandes konzipiert.

zu 1) Zum ersten Konzept von Verstehen habe ich in Meyerhöfer (2013, 2015) herausgearbeitet, dass Schule immer eine Tendenz hat, ihre Bildungsgegenstände vom Bildsamen zu entkleiden und auf (in Klassenarbeiten) Testbares zu reduzieren. Dies ist verbunden mit einem Verstehensbegriff, der das in Aufgaben Kristallisierbare fokussiert. Im Mathematikunterricht spezifiziert sich das im Abarbeiten von Techniken des Rechnens, der Termumformung, der Kurvendiskussion usw.

zu 2) Der Ansatz, Verstehen zu konzeptualisieren als die Fähigkeit, verschiedene Repräsentationen eines mathematischen Gegenstandes ineinander zu übersetzen, scheint sich eher schleichend herauskristallisiert zu haben. Ein Beispiel: Im Diskurs um die Ablösung vom zählenden Rechnen wird der Text „Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht“ deutungsleitend rezipiert. Dort findet sich zunächst ein recht komplexer Verstehensbegriff:

> „Ein Individuum hat ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur „verstanden“, wenn es einige Verbindungen hergestellt hat zu bereits in *seinem* Geist existierenden Ideen … „Verstehen“ bedeutet also das Herstellen von Beziehungen.“ (Gerster, Schulz, 2000, S. 32)

Im Weiteren findet sich dann aber ein Verstehensbegriff, der im Vergleich dazu eher verkürzt erscheint, auf den sich aber der mathematikdidaktische Diskurs viel häufiger bezieht:

„Unter welchen Umständen wollen wir sagen: Das Kind hat die Operationen des Addierens/Subtrahierens ‚verstanden'? *Operationsverständnis* beim Addieren/Subtrahieren besteht nach unserer Auffassung in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen
- (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
- modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
- symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrunde liegenden Qualitäten und Rechenoperationen." (ebd., S. 351)

Wir spüren bereits, dass dieser Intermodalitäts-Begriff des Verstehens den Nachteil hat, dass die Verbindung von mathematischen Ideen und von „im Geist des Kindes existierenden Ideen" nicht mehr in ihrer Komplexität in den Blick genommen wird. Er hat aber den Vorteil, dass hier eine Handlungsanweisung vorliegt: Wenn du Verstehen herbeiführen willst, dann sorge dafür, dass die Lernenden verschiedene Modi der Repräsentation des Gegenstandes ineinander überführen können. Im Weiteren kommt dann hinzu, dass diese Form von Verstehen sehr leicht in Form von Klassenarbeiten und von standardisierten Tests zu prüfen ist. Dieser Verstehensbegriff baut also eine Brücke zum technischen Verstehensbegriff der Lehrer/innenschaft und zur Reduzierung von Bildung auf standardisiert Testbares.

Dieser reduzierte Verstehensbegriff scheint sich immer ausgeschärfter im Diskurs durchzusetzen – zumal er ja gut in alle messenden Diskursstränge passt. Ich habe das im Vortrag exemplarisch an der neuesten Auflage der Padberg´schen „Didaktik der Bruchrechnung" (Padberg/Wartha 2017) herausgearbeitet, also an einem einflussreichen Lehrbuch für die Lehrpraxis.

Die dort entwickelte Position zum Verständnis und zu Grundvorstellungen lässt sich so zusammenfassen: Grundvorstellungen sind mentale Modelle zu mathematischen Inhalten. Mentale Modelle sind Repräsentationen im Kopf zu Begriffen oder Sachverhalten und zum Arbeiten damit. Ergo: Grundvorstellungen sind Repräsentationen im Kopf zu Begriffen oder zu Sachverhalten und zum Arbeiten damit.

Man soll sich etwas vorstellen, das die mathematische Struktur richtig widerspiegelt. Es sind geeignete Darstellungsmittel zu nutzen, an denen die Inhalte repräsentiert werden. Zentral ist, dass diese Repräsentationen ineinander übersetzt werden.

Als ein „umfassendes Verständnis" wird „das sichere Wissen um Konventionen zu verschiedenen Darstellungen" des Gegenstandes „sowie das flexible Übersetzen zwischen diesen Darstellungen" (ebd., S. 1) konzipiert. Meine Deutung wäre hier, dass „Verständnis" und „Grundvorstellungen haben" im Grunde das Gleiche ist, nämlich das Wissen um verschiedene Darstellungen des Gegenstandes und die als zentral bezeichnete Fähigkeit, diese ineinander zu übersetzen.

Im Ganzen wird (in der Langfassung des Textes, die die Analyse enthält) deutlich, dass in diesem – hier ja exemplarisch für einen Diskursstrang rezipierten – Text das Verstehen und die Herausbildung von Grundvorstellungen reduziert werden auf die Fähigkeit, verschiedene Repräsentationen eines Gegenstandes ineinander zu übersetzen.

Verstehen als begriffliche Durchdringung des Gegenstandes

Im oben diskutierten Konzept wird als zentral gekennzeichnet, „dass das Modell die mathematische Struktur richtig widerspiegelt […] und damit flexibel operiert und argumentiert werden kann" (ebd., S. 4). Daraus ergibt sich die didaktische Frage: Wie kommt es eigentlich zustande, dass mit den mentalen Repräsentationen flexibel operiert und argumentiert werden kann?

Nun werden die Vertreter/innen dieses Ansatzes sicherlich eine sehr einleuchtende Antwort geben: Man lernt flexibel operieren und argumentieren, indem man im Unterricht viel flexibel operiert und argumentiert. Aber mir geht es darum, die Unterschiede in unseren Ansätzen zu verstehen und lehrreich zu machen. Man kann sagen: Das **flexible Operieren** ist das Kerngeschäft der Aufgabendidaktik. Hier mache ich mir keine Sorgen, denn ich nehme wahr, dass viele neue Aufgabenformate entwickelt werden, die im Sinn haben, das Rechnen immer stärker zu einem flexiblen Operieren hin zu entwickeln.

Beim **Argumentieren** sehe ich hingegen eine ernsthafte Lücke und auch einen ernsthaften und folgenreichen Dissens. Für das Argumentieren gibt es im hier paradigmatisch betrachteten Lehrbuch von Padberg/Wartha keinen theoriesprachlichen Ort. Das spiegelt sich in einer systematischen Absenz von Argumentationsmustern. Auch in anderen aktuellen Lehrbüchern der Mathematikdidaktik wird mittlerweile (im Anschluss an die Bildungsstandards) vielstimmig das Bekenntnis zum mathematischen Argumentieren abgegeben, aber es wird nicht benannt, *was gesprochen werden soll*, was also die Argumente sind, die der Lehrer in die Klassenöffentlichkeit bringen muss. Das hat sicherlich etwas mit einem verbreiteten Missverständnis zu tun, dass Argumentieren vorrangig vom Schüler kommen muss – eine Tendenz, die durch latente Outputorientierung gestärkt wird. Es hat aber ebenso etwas damit zu tun, dass der didaktische Diskurs gar nicht danach sucht, welche Argumente überhaupt vorzubringen sind. Der Inhalt der Argumentationen, die zur *Erschließung* des mathematischen Gegenstandes führen, wird nicht expliziert. Argumentieren wird mit einem Fokus auf Schülerperformance in den Blick genommen, nicht aber als Mittel zur Erschließung des Gegenstandes.

Ich möchte nun für einen Ansatz werben, der Verstehen als begriffliche Erschließung des mathematischen Gegenstandes konzipiert. Ich stelle in der Langfassung dieses Textes zunächst den Begriff des Operationsverständnisses, den ich oben bei Gerster/Schultz kritisiert habe, in einer begrifflichen Orientierung vor. Allgemein kann man das, was eine begriffliche Erschließung von mathematischen Gegenständen sein soll, entlang der folgenden Fragen abstecken:

Was ist eigentlich das, was hier zu verstehen ist? (Und: Was ist hier automatisiert zu können, welche Fertigkeiten sollen also ausgebildet werden?) Warum funktioniert dieses Verfahren? Warum führt es immer zu einem korrekten Resultat? Wie anders könnte die Sache konstruiert sein? Warum ist die Sache so benannt? Wie anders könnte die Sache benannt sein? Wie ist die Sache historisch entstanden? Was wird mit diesen Veranschaulichungsmitteln eigentlich erzählt? Was wird hier repräsentiert? Was bedeuten diese Bilder und Repräsentationen?

Für den Bereich der Ablösung vom zählenden Rechnen findet man einen solchen Ansatz ausgearbeitet im Manual zum Jenaer Rechentest (JRT) sowie im DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Ich erkenne diesen Ansatz auch bei Gaidoschik (z.B. 2015). Dort ist er systematisch in einen Lehrgang zur Ablösung vom zählenden Rechnen umgesetzt, aber eher wenig theoriesprachlich elaboriert. Ich erwähne diese Texte, weil mir hier etwas durchaus Neues vorzuliegen scheint: Es gab ja im mathematikdidaktischen Diskurs immer Diskursstränge, die Plädoyers für die begriffliche Erschließung von mathematischen Gegenständen geführt haben. Mit den genannten Texten liegen aber explizit ausgearbeitete begriffszentrierte Konzeptionen für einen fest umrissenen Gegenstandsbereich des Anfangsunterrichts vor. Das ist innerhalb des Themas des Minisymposiums, Stellenwertverständnis, deshalb wichtig, weil damit quasi im Sinne einer Agenda ein nächster Entwicklungsschritt avisiert ist, nämlich die Ausarbeitung einer Konzeption der *begrifflichen* Erschließung von Stellenwertverständnis.

Literatur

Gaidoschik, M. (2015). Rechenschwäche vorbeugen. Wien: G&G Verlag.

Gerster, H.-D.; Schultz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Freiburg: PH.

Meyerhöfer, W. (2013): Unterrichten – standardisiertes Testen – Erziehen. In: S. Lin-Klitzing u.a. (Hrsg.): Zur Vermessung von Schule. Bad Heilbr.: Klinkhardt, 181-205.

Meyerhöfer, W. (2015): Mathematikaufgaben zwischen Bildung und Standards. In: S. Rademacher; A. Wernet (Hrsg.): Bildungsqualen. Wiesbaden: Springer VS, 103-118.

Padberg, F.; Wartha, S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung. Wiesbaden: Springer Spekt.

Eine Langfassung des Textes kann beim Autor angefordert werden.