Katharina MROS, Essen

Das Wechselspiel von Anwendungs- und Strukturorientierung im Mathematikunterricht der Grundschule – Interpretative Rekonstruktion epistemologischer Deutungsanforderungen

Der Lehrplan NRW (MSW 2008, 55) benennt fünf zentrale Leitideen des Mathematikunterrichts der Grundschule und fordert u.a. das Aufgreifen und die Weiterentwicklung mathematischer Vorerfahrungen in lebensweltlichen Situationen sowie die Erweiterung und Vertiefung von Einsichten über die Realität mit Hilfe der Mathematik (Anwendungsorientierung) als auch das Aufdecken von Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten, die mathematische Phänomene strukturieren (Strukturorientierung). Das Verhältnis dieser beiden Leitideen ist jedoch ein problemhaltiges, bei dem „Diskontinuitäten zwischen Lebenswelt und arithmetischen Begriffen“ (Winter 1994, 11) auftreten. Wenn Kinder mit einer Aufgabe konfrontiert werden, die einen lebensweltlichen Bezug aufweist, genügt es nicht, dass sie ausreichend viele sachliche Details vernachlässigen und sich auf die genannten Zahlen konzentrieren. Stattdessen muss die Beziehung zwischen Sachverhalt und Mathematik „durch eine theoretische Veränderung des empirischen Sachverhalts zur strukturellen Erweiterung des Sachverhalts“ (Schwarzkopf 2006, 104) hergestellt werden und entspricht demnach „eher einer Erfindung als einer Übersetzung“ (ebd.).

Veranschaulichungen und Symbole

Aus der Entwicklungspsychologie ist bekannt, dass Kinder bereits im Kleinkindalter spontan und im spielerischen Zusammenhang Gegenstände symbolisch als „something that someone intends to represent something other than itself“ (DeLoache 2004, 66) benutzen. Da ist es nicht verwunderlich, dass diese alltägliche, spontane Symbolnutzung den Mathematikunterricht begleitet: Veranschaulichungen stellen manipulierbare Materialien, Bilder und Diagramme dar, die im Mathematikunterricht fälschlicherweise häufig „als ‚sprechende Bilder’ und ‚konkrete’ Repräsentationen abstrakter Begriffe und Sachverhalte“ (Jahnke 1984, 32) betrachtet werden. Demnach seien Veranschaulichungen „selbstevident. Sie teilen das, was sie zu sagen haben, dem Betrachter (dem Schüler) unmittelbar mit“ (ebd.). Jedoch sind auch in diesen Repräsentationen symbolische Aspekte enthalten und stellen immer eine Abbildung der Eigenschaften und Beziehungen dar, die bekannt oder von Interesse sind (vgl. ebd., 37).

Dieser symbolische Aspekt ist insbesondere bezogen auf die Zugänglichkeit mathematischer Objekte von hoher Relevanz. Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften ist mathematisches Wissen nicht direkt sinnlich zugänglich. Mathematische Objekte sind unsichtbare Begriffe, die allein über bspw. Zeichen, Symbole, Wörter und Zeichnungen zugänglich werden, wobei die mathematischen Objekte selbst nicht mit ihren semiotischen Repräsentationen verwechselt werden dürfen („paradoxical character of mathematical knowledge" vgl. Duval 2000, 61). Arbeits- und Anschauungsmittel sind als Repräsentationen somit nicht selbst die mathematischen Objekte. Allerdings stehen sie in einer nahen Beziehung zueinander, die aktiv von einer Person konstruiert und interpretiert wird und dadurch als Erklärungsbasis für neues mathematisches Wissen im Lern- und Verstehensprozess dient (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2008, 159). Mathematische Symbole weisen demnach immer zwei Funktionen auf: eine semiotische (verweisende) und eine epistemologische (vgl. Steinbring 2005, 21).

Das Projekt AuS-ReDen

Das Forschungsprojekt AuS-ReDen (Akronym des Titels dieses Aufsatzes) beinhaltet eine qualitative interpretative Studie, in der durch epistemologische Analysen der Entwicklungsprozess von alltagsbezogener zu mathematisch-relationaler Symbolnutzung mit einem theoretischen Konstrukt ausgearbeitet wird. Dabei sind u.a. die nachfolgenden Forschungsfragen von Interesse:

- Welche Arten von Symbolfunktionen lassen sich aus den Bearbeitungs- und Deutungsprozessen von Kindern rekonstruieren?
- Welche spezifischen Merkmale für alltagsbezogene und mathematisch-relationale Symbolisierungen sind rekonstruierbar?
- Wie (ver)ändern sich Nutzung und Deutung des zu präsentierenden Materials auf dem Weg zu einer systemischen Nutzung?

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden an zwei Grundschulen (4. Klasse) in Nordrhein-Westfalen je acht Prä-Interviews (Einzelinterviews, 60-90min), vier Interventionssitzungen (90min) mit der gesamten Klasse und Sequenzen von Post-Interviews (drei Partnerinterviews mit je 3 Sitzungen, 90min) durchgeführt. Die Intervention stellt dabei kein Training dar, sondern dient der Einführung in eine Kultur des (Um)Deutens. Die an der Studie teilnehmenden Kinder bearbeiten verschiedene Aufgaben (Typ vorwärts und rückwärts rechnen) mit unterschiedlichen Sachkontexten und Bearbeitungsformen (Rechnungen/mathematische Symbol- und Operationszeichen, Zeichnungen bzw. Skizzen und manipulierbare Materialien).

Epistemologische Deutungsebenen zu sachbezogenen Anforderungen

Bisherige Auswertungen der videografierten und anschließend transkribierten Interviews lassen erste Charakteristika der drei Deutungsebenen *Alltagssicht*, *mathematische Sicht* und *systemisch-relationale Sicht* erkennen.

Bei der *Alltagssicht* ist die Logik der Narration an den Sacheigenschaften orientiert. Die Deutungen des Kindes greifen konkrete Elemente der Geschichte auf, bisweilen wird die Geschichte sogar erweitert. Arbeits- und Anschauungsmittel werden zur möglichst vollständigen ggf. ausschmückenden Nachbildung des Sachverhalts genutzt. In einem naiven Verständnis kann davon gesprochen werden, dass hier einige der von den Kindern erstellten Repräsentationen aus sich heraus sprechen (vgl. Jahnke 1984), da ihre Elemente mit einer möglichst starken Analogie zur Realität gewählt werden. Dennoch enthalten sie symbolischen Charakter, sie verweisen im semiotischen Sinn auf die Sachelemente. Die dem Konstrukteur wichtigen Aspekte werden jedoch hervorgehoben und aktiv interpretiert (vgl. Nührenbörger & Steinbring 2008). So können verschiedene Deutungsebenen (bspw. auf dieselbe Zeichnung) Anwendung finden, wie Emilia es an der Boots-Aufgabe zeigt (s. Abb. 1).

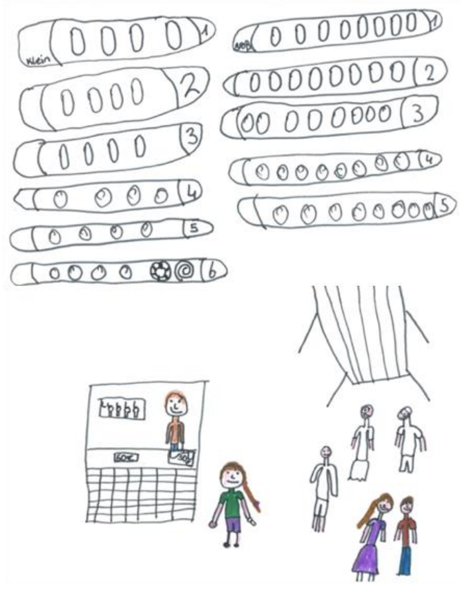

Abbildung 1: Emilias Zeichnung

In der Alltagssicht fasst Emilia zusammen, was sie gemalt hat und zeigt anhand ihrer Zeichnung u.a. die bereits aufgestellten Boote, den Steg, einen Mann im Wasser, der den Kindern beim Einsteigen hilft, die Lehrerin mit dem Schlüssel für die Umkleidekabine und einen Verkaufstand mit Kasse und Verkäufer. In der mathematischen Sicht konzentriert sie sich auf die Ergebnisermittlung anhand der Anzahl der Boote (Nummern rechts am Boot) und der Anzahl von Sitzplätzen (Kreise in einem Boot) als Multiplikationsaufgaben.

Bei der *mathematischen Sicht* ist die Logik der Narration an arithmetischen Zusammenhängen orientiert. Kinder verstehen die Geschichte über die Sachelemente hinaus, sodass Handlungen wie zählen und vergleichen möglich werden. Die Nutzung der Repräsentationsmittel stellt eine Neu-Konstruktion der Geschichte und somit eine Erfindung (vgl. Schwarzkopf 2006, 104) dar, bei der auf arithmetische Beziehungen fokussiert wird. Der Gebrauch des mathematischen Zeichen-Systems (Zahlund Operationszeichen) ist möglich. Den einzelnen Sachelementen, die mathematisch von Bedeutung sind, wird jeweils ein Element zugeordnet, sodass von einer Trennung der Sachelemente gesprochen wird.

Bei der *systemisch-relationalen Sicht* ist die Logik der Narration an strukturellen Charakteristika bei gleichzeitiger Loslösung von dinglichen Eigenschaften orientiert. In einer weiteren Aufgabe symbolisiert Emilia von sich aus die Kinder in den Booten durch blaue Striche, die zudem mit roten Rand-Strichen als Vierer oder Achter (-Boote) markiert werden. Die verwendeten Repräsentationsmittel werden zu systemischen Mitteln, d. h. zu Trägern für interne Strukturen und Beziehungen. Lag bei der mathematischen Sicht noch eine Trennung der einzelnen Sachelemente vor, so werden diese in der systemisch-relationalen Sicht durch wechselweise Beziehungen zusammengeführt. Zwei Arten eines variablen Austausches werden so möglich: Ein *interner Austausch* zwischen verschiedenen mathematisch relevanten Elementen der Sache innerhalb desselben Aufgabenkontexts (Emilia wandelt zwei Viererboote in ein Achterboot um); ein *externer Austausch* über verschiedene Aufgabenkontexte hinweg (ein Viererboot ist ein Auto mit 4 Reifen, ein Achterboot ist ein LKW mit acht Reifen).

Literatur

DeLoache, J. S. (2004). Becoming symbol-minded. *Trends in Cognitive Sciences, 8*, 66-70.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In Nakahara, T. & Koyama, M. (Hrsg.), *Procedings PME XXIV, 2000* (S. 55-69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co.

Jahnke, H. N. (1984). Anschauung und Begründung in der Schulmathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 32-41). Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.

MSW - Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen.* Frechen: Ritterbach Verlag.

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as Tools in Mathematics Teacher Education. Tirosh, D. & Wood, T. (Hrsg.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (S. 157-181). Rotterdam: Sense Publishers.

Schwarzkopf, R. (2006). Elementares Modellieren in der Grundschule. In: Büchter, A., Humenberger, H., Hußmann & S., Prediger, S. (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis* (S. 95-105). Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction - An Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library, Vol. 38. Berlin, New York: Springer.

Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. *Grundschule, 3*, 10-13.