

Gerhard N. MÜLLER, Dortmund

## **Forschen und Finden für Lehrerinnen und Lehrer der Grundschule**

Seit dem Erscheinen vor über 25 Jahren hat das „Handbuch produktiver Rechenübungen“ der Autoren E. Wittmann und G. Müller in der Lehrerbildung der Primarstufe breit Fuß gefasst. Zum 30-jährigen Jubiläum des Projekts Mathe 2000 wurde eine Neufassung vorgelegt. Auch im neuen Handbuch werden neben „produktiven“ Übungen auch „grundlegende“ und „automatisierende Übungen“ gründlich behandelt. Die beibehaltene Hervorhebung des „produktiven“ Übens im Titel erklärt sich daraus, dass diese Übungsform die Schönheit und Attraktivität der Mathematik als Wissenschaft von Mustern zur Geltung bringt und ein Schwerpunkt der Entwicklungsforschung im Projekt Mathe 2000 war und ist. Während das alte Handbuch von 1990/92 die Grundlage für das Unterrichtswerk DAS ZAHLENBUCH 1994 – 1997 bildete, stützt sich das neue Handbuch umgekehrt auf die langjährigen Erfahrungen mit diesem Unterrichtswerk.

Das neue Handbuch ist eine Art mathematisches Tourenbuch. Die Leserinnen und Leser sollen die dort beschriebenen Lernumgebungen zuerst alleine oder in der Gruppe „durchwandern“, bevor sie die Lernumgebungen mit Kindern „durchwandern“, d.h. in Unterricht umsetzen. Je besser die Lehrperson das mathematische Gelände kennt, desto leichter und sicherer kann sie Kinder führen, sich ihrem Denken öffnen und sie ggf. auch laufen lassen. Zum Abschluss eines jeden Themas bieten wir den Leserinnen und Lesern unter der Rubrik „Forschen und Finden“ kleine mathematische Touren an, die zur Mobilisierung der eigenen mathematischen Fähigkeiten dienen.

Eigene mathematische Fähigkeiten sind kein Selbstzweck, sondern vermitteln wichtige Einsichten für die Arbeit mit den Kindern. Man muss selbst erlebt haben, wie man durch Versuch und Irrtum auch schwierigere Aufgaben bewältigen kann, bei denen man sich am Anfang wie der sprichwörtliche Ochse vor dem Berg vorkommt. Eigene „Heureka“-Erfahrungen sind äußerst hilfreich, um Kindern beim Durchwandern der Lernumgebungen professionell begleiten zu können. Man kennt dann die schwierigen Wegstrecken und auch die Gefühle, die bei der Auseinandersetzung mit der Mathematik auftreten können, aus eigener Erfahrung und kann den Kindern Mut zusprechen.

Im Folgenden werden einige Beispiele dieser zahlreichen mathematischen Touren für die Leserin und den Leser vorgestellt:

### **Beispiel 1: „15 gewinnt“**

Für das strategische Zweipersonenspiel „15 gewinnt“ werden Wendekarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 benutzt. Die neun Karten liegen zu Beginn auf dem Tisch. Die Spieler nehmen abwechselnd je eine Karte. Gewonnen hat, wer aus einigen seiner Karten oder allen zuerst die Summe 15 bilden kann.

Spielen Sie das Spiel mit einer Partnerin einige Male und überlegen Sie dann gemeinsam, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Warum kann das Spiel nicht „Patt“ enden, was ja der Fall wäre, wenn es eine Verteilung der Karten gäbe, bei der keiner die Summe 15 bilden könnte. Variieren Sie das Spiel z.B. zu „13 gewinnt“.

### **Beispiel 2: „Rot gegen Blau“**

Im Handbuch wird das Strategiespiel „Rot gegen Blau“ als Unterrichtsbeispiel für die Frühförderung vorgeschlagen. Dieses Spiel haben wir bereits 1977 in „Der Mathematikunterricht in der Primarstufe“ als eine elementare Variante von NIM beschrieben. Dieses strategische Spiel für zwei Personen oder Gruppen wird auf dem Abschnitt 1 bis 10 der Zahlenreihe gespielt. Die Regeln sind denkbar einfach: Die Spieler handeln aus, wer beginnt, und ziehen abwechselnd. Bei 1 beginnend legen sie ein oder zwei Plättchen ihrer Farbe unter die Zahlen der Zahlenreihe. Bei jedem Zug dürfen Sie entscheiden, ob sie ein oder zwei Plättchen legen möchten. Wer als erster bei 10 landet gewinnt.

Dieses Spiel lässt sich im zweiten Schuljahr auf der Hundertertafel modifizieren. Zwei Spieler spielen wieder gegeneinander, jeder mit Plättchen seiner Farbe. Der erste Spieler legt sein Plättchen auf 1, 2, 10 oder 20. Der zweite Spieler darf sein Plättchen davon ausgehend um 1, 2, 10 (1 Zehner) oder 20 (2 Zehner) weiter ablegen. Analoge Möglichkeiten für die weiteren Züge beider Spieler. Die jeweils erreichte Zahl wird immer genannt. Gewonnen hat, wer 100 erreicht.

Mögliche Zugfolge (1. Spieler in fett): **2**, 12, **32**, 33, **53**, 55, **75**, 76, **86**, 88, **90**, 91, **92**, 94, **95**, 97, **99**, 100. Hier hat der zweite Spieler gewonnen.

Aufgabe für die Leserin: Zeigen Sie, dass der erste Spieler eine Gewinnstrategie hat. Hinweis: Er wählt am Anfang 1 oder 10 und wählt dann seine Züge so, dass der Zug des zweiten Spielers und sein Gegenzug immer ein Vorrücken um Vielfache von 3 ergeben.

### **Beispiel 3: „Einspluseins trifft Einmaleins“**

Wählen Sie zwei Zahlen aus dem Bereich 1 bis 11 (1 und 11 eingeschlossen), bilden Sie daraus eine Mal- und eine Plusaufgabe und subtrahieren

Sie das Ergebnis der Plusaufgabe vom Ergebnis der Malaufgabe. Bei einer Wahl von 3 und 5 wird somit die Zahl 7, bei 6 und 7 die Zahl 29 und für die Wahl von 8 und 11 die Zahl 69 markiert. Kreisen Sie die Ergebnisse farbig ein. Für zwei Ergebnisse müssen Sie die Hundertertafel am besten nach oben erweitern. Beschreiben Sie mit Begriffen aus der Didaktik der Primarstufe kurz und bündig die markierten Zahlen.

#### **Beispiel 4: „Einmaleinsreihen“**

Wenn man die Dreierreihe bei 0 beginnend aufwärts 0, 3, 6, 9, ... und die Siebenerreihe von 70 abwärts 70, 63, 56, 49, ... durchläuft, fällt auf, dass die Einer in beiden Reihen übereinstimmen. Bei welchen anderen Paaren von Reihen finden Sie das gleiche Muster. Begründen Sie dies.

#### **Beispiel 5: „Ziffernkarten 1“**

Nehmen sie je ein Exemplar der neun Ziffernkarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zur Hand und bilden Sie drei 3-stellige Zahlen so, dass

- a) die Differenz zwischen der größten und der kleinsten Zahl möglichst groß ist,
- b) die Differenz zwischen der größten und der kleinsten Zahl möglichst klein ist,
- c) die Differenz zwischen der größten und der mittleren Zahl gleich der Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist. Finden Sie auch Lösungen, bei denen bei der Berechnung Überträge auftreten.
- d) Versuchen Sie bei der Aufgabenstellung c) diese Differenz möglichst klein und möglichst groß zu machen. Hinweis: Die minimale Differenz liegt weit unter 100.

#### **Beispiel 6: „Ziffernkarten 2“**

Legen Sie mit den neun Ziffernkarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 drei 3-stellige Zahlen, so dass die größte Zahl die Summe der beiden kleineren Zahlen ist. Jede Ziffer darf nur einmal verwendet werden.

Suchen Sie Beispiele und bilden Sie von der Summe jeweils die Quersumme.

Finden Sie in entsprechender Weise Aufgaben mit den Ergebnissen 486, 594, 783, 819, 918 und 963. Die Zahl 369 hat auch die Quersumme 18. Warum ist diese Zahl trotzdem nicht als Ergebnis möglich? Die Suche nach einem grundschulgemäßen Beweis, dass die Quersumme zu der so gewonnenen Summe immer 18 sein muss, ist äußerst aufschlussreich und hat das Thema „operative Beweise“ im Projekt mathe 2000 sehr beflügelt.

Die zahlreichen Aufgaben von „Forschen und Finden“ in beiden Handbüchern sind, wie die sechs vorgestellten Beispiele immer so gewählt, dass sie zum Curriculum gut passen. Sie vertiefen somit Einsichten zu zentralen Themen des mathematischen Lehrplans, wie etwa Beispiel 1 zum Einspluseins, Beispiel 2 zur Zahlenreihe, die Beispiele 3 und 4 zum Einmaleins und die Beispiele 5 und 6 zur (halbschriftlichen und schriftlichen) Addition und Subtraktion im Tausenderraum. Man kann immer als Einstieg zunächst eine Reihe von Aufgaben rechnen, gelangt dann wegen der vorhandenen Muster in diesem Aufgabenmaterial fast zwangsläufig zu Vermutungen und erzielt so Lösungen oder zumindest Teillösungen. Man darf nicht gleich aufgeben, auch wenn es einmal nur langsam vorangeht. Dies ist ein Fehler, der im Unterricht auch häufig gemacht wird. Wir halten diese Form der Unterrichtsvorbereitung für den Lehrpersonen sehr effektiv.

Die Beschäftigung mit den Aufgaben zu „Forschen und Finden“ tragen so nicht nur zur professionellen Lehrerbildung im Fach Mathematik bei, sondern Aufgaben in dieser Form liefern oft auch zusätzlichen Stoff für die Förderung leistungsstarker Schüler.

## **Literatur**

- Wittmann, Erich Ch., Müller, Gerhard N. (2017). Handbuch produktiver Rechenübungen Bd 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins, Seelze: Kallmeyer, Stuttgart: Klett
- Wittmann, Erich Ch., Müller, Gerhard N. (2018). Handbuch produktiver Rechenübungen Bd 2, Halbschriftliches und schriftliches Rechnen, Seelze: Kallmeyer, Stuttgart: Klett
- Müller, Gerhard N., Wittmann, Erich Ch. (1977), Der Mathematikunterricht der Primarstufe, Braunschweig: Vieweg