

Hypothesengenerierung mittels operativer Invarianten unter dem instrumentellen Ansatz – die Rolle der Aufzeichnungen

Dieser Beitrag untersucht die Frage, wie Aufzeichnungen, die Lernende im Rahmen von Problembearbeitungsprozessen anfertigen, als Basis der Generierung von Erklärhypothesen dienlich sein können. Aufzeichnungen werden dabei idealtypisch als dynamische Ergebnisse einer erfolgreichen instrumentellen Genese auf zwei verschiedenen Ebenen aufgefasst. Anhand von ersten Ergebnissen aus Videographiestudien werden problematische Aspekte auf dem Weg zu einer solchen Nutzung von Aufzeichnungen angedeutet.

1. Mathematisches Erklären und Problemlösen

Im Laufe eines (kooperativen) mathematischen Problemlöseprozesses werden erklärende (Arbeits)hypothesen generiert, argumentativ gestützt, gegeneinander abgewogen, weiterverfolgt, verändert oder verworfen. Gemäß dem hier verwendeten Modell des nomischen mathematischen Erklärens (Müller-Hill 2017a) werden bei der Analyse von Problembearbeitungsprozessen solche erklärenden Arbeitshypothesen in der folgenden Struktur rekonstruiert:

Wenn eine bestimmte Manifestationsbedingung A aufträte, träte ein bestimmtes Ereignis E ein (als Manifestation bestimmter Eigenschaften der beteiligten Objekte).

Die beiden wesentlichen Testbedingungen der funktionalen und Objekt-Invarianz (vgl. ebd.) für den tatsächlichen Erklärgehalt einer Hypothese testen deren operative Invarianz in folgendem Sinne: „Was passiert, wenn ich eingreife, etwas an der Bedingung A verändere, die relevanten Objekten variere?“. Operative Invarianten erfasst und prüft das Erkenntnissubjekt im Wechselspiel zwischen Handeln am Objekt und systematisierendem Denken. Ausgehend von einem idealtypischen, prinzipiell iterativen Prozess der Hypothesengenerierung (vgl. auch Müller-Hill 2017b) verortet sich das *Erfassen* darin als *initiale Abduktion* im Sinne eines „Hineinsehens“ von Regelmäßigkeiten in wahrgenommene Phänomene.

2. Aufzeichnungen als Basis der Hypothesengenerierung

„Weißt Du noch, was wir gemacht haben?“ – Anschauungsmaterial ermöglicht im Bearbeitungsprozess zwar das notwendige oder zumindest hilfreiche Handeln und Variieren am konkreten Objekt, das Material selbst hat aber kein „Gedächtnis“. So wird möglicherweise eine Lösung durch Probieren gefunden, deren Entstehungsprozess dem systematisierenden Denken in der

Rückschau nicht mehr zur Verfügung steht. Operative Invarianten sind entsprechend nicht unbedingt *allein* durch Operieren an Objekten als solche erfass- und prüfbar. Aufzeichnungen können daher als festgehaltene und ver- und bearbeitete Ergebnisse der „Arbeit am Objekt“ eine Schlüsselrolle bei der Hypothesengenerierung spielen – sowohl auf der **Metaebene** festgehaltener Arbeitsprozesssequenzen inkl. strukturierender Elemente wie „Vermutung“, „Ergebnis“, „Idee“ etc., als auch auf der **Objektebene** durch festgehaltene Rechnungen, Bilder, Diagramme, etc.

Magnani beschreibt in seinem Aufsatz „*Reasoning through doing*“ (2004) in diesem Sinne die hohe Relevanz von externen Repräsentationen als „*epistemic mediators*“ beim „*discovering through doing*“ auch für das wissenschaftliche Arbeiten, und verwendet für die derart vermittelten Hypothesengenerierung den Terminus „*manipulative abduction*“. Um die Rolle der Aufzeichnungen als „*epistemic mediators*“ bei der Hypothesengenerierung in konkreten Bearbeitungsprozessen analysieren zu können, wird der sogenannte *instrumentelle Ansatz* nach Vergnaud (1990) und Rabardel (1995) genutzt (vgl. z.B. auch Kern 2008), welcher Prozesse der *instrumentellen Genese* als menschliche Aktivität beschreibt und erklärt. Ein *Instrument* wird dabei als psychologische Entität bestehend aus einem menschengemachten Artefakt (hier: Aufzeichnungen) und zugehörigen subjektiven Verwendungsschemata betrachtet. Verwendungsschemata sind kognitive Invarianten im Sinne gemeinsamer Rahmen für Handlungen, die das Individuum als gleichartig erachtet. Sie werden an einzelnen, speziellen Handlungssituationen erworben, gespeichert und (weiter-)entwickelt, in denen das Subjekt (hier: ProblembearbeiterIn) das Instrument in seine auf ein Objekt (hier: mathematisches Problem) gerichtete Aktivität integriert.

3. Skizze einer Videographie-Studie

Ein Vorteil von kooperativen gegenüber individuellen Bearbeitungsprozessen kann darin bestehen, dass auf natürlichere Weise als beim individuellen „Lauten Denken“ Ungeschriebenes, Unfertiges im Diskurs sichtbar werden kann. Die in Abschnitt 4 vorgestellten Ergebnisse entstammen einer Videostudie zu kooperativen Problembearbeitungsprozessen von Kleingruppen à 2-3 SchülerInnen der Einführungsphase eines Gymnasiums in NRW. Dabei wurden sowohl freie Notizen ermöglicht, als auch die Ergebnisse angeleiteten Dokumentierens eingefordert. In einem ersten Analyseschritt (mittels VRA) geht es um die Identifikation und ggf. Rekonstruktion unterschiedlicher Teilprozesse und Aspekte einer möglichen instrumentellen Genese (vgl. Kern 2008), insbesondere Übergänge von unbewussten (bestimmt durch Motivation und Emotion gegenüber dem Artefakt) zu bewussten Verwendungsschemata (Ergebnisse eines kognitiven Prozesses des Aneignens) für

Aufzeichnungen und Aufzeichnungselemente, sowie um Strukturierungs- und Mediationseffekte letzterer auf den Bearbeitungsprozess.

4. Ausgewählte Ergebnisse

In den betrachteten Bearbeitungsprozessen erwies sich das Mediationspotential der von den Schülerinnen und Schülern angefertigten Aufzeichnungen als eher gering. Dies äußerte sich u.a. in folgender Form:

- Denkwege und Alternativen wurden kaum aufgeschrieben und stehen einer späteren Revision nicht zur Verfügung.
- Es wurden eher erwünschte bzw. als zulässig geltende Beweggründe für den verfolgten Weg oder Ansatz aufgeschrieben, auch wenn sich im mündlichen Diskurs andere bzw. weitere Gründe andeuteten.
- In den freien Notizen findet sich kaum systematische Meta-Dokumentation (Ausnahme: Durchstreichen) oder Gliederung.

Die SchülerInnen schienen weiterhin in bereits *habituieren* bewussten oder in vorhandenen unbewussten Schemata für die Verwendung bestimmter Aufzeichnungselemente verhaftet, was die instrumentelle Genese neuer Verwendungsschemata für Aufzeichnungen zum Zwecke der Hypothesengenerierung im Sinne einer *instrumented abduction* erschwerte bzw. verhinderte.

Auf der Metaebene waren etwa folgende, mutmaßlich im Schulunterricht verinnerlichte Verwendungsschemata beobachtbar: Es wird nur etwas aufgeschrieben (bzw. schon Aufgeschriebenes stengelassen), wenn man eine „erlaubte“, normierte Form dafür kennt (Formel, Tabelle, Antwortsatz, ...), und wenn man sich sicher ist, dass es richtig ist.

Auf der Objektebene dominierten insbesondere vorhandene bewusste Verwendungsschemata für die Aufzeichnungselemente „Tabelle“ und „Formel“: Es wurden Tabellen generiert, um Regelmäßigkeiten von noch unbekannter Art zu erkunden. Ausgelesen wurden dagegen funktionale *Standardzusammenhänge* (proportional, exponentiell) aus den ersten Tabellenzeilen, auch wenn diese im Ganzen erkennbar nicht passten (eher wurde die Korrektheit der unpassenden Zeile bezweifelt). Solche Tabellen wurden auch dann umfangreich fortgesetzt, wenn der (vermeintliche) funktionale Zusammenhang bereits erkannt wurde. Dies lässt sich als fehlende *Instrumentation* (Evolution und Elaboration der Verwendungsschemata) beschreiben. Als fehlende *Instrumentalisierung* (Evolution und Transformation des Artefakts) auf Objektebene erscheint dagegen folgende Beobachtung: Ein Schülerpaar verwendete graphische Darstellungen zur vereinfachten Variation der betrachteten Situation. Diese wurden aber nicht der mathematischen Situation angemessen als Darstellung der Seitenflächen eines betrachteten Körpers,

sondern als perspektivische Darstellung des Körpers selbst angesetzt. Als dies nicht zur Zufriedenheit gelang, wurde die Nutzung graphischer Darstellungen im weiteren Prozess ganz unterlassen.

Zudem gab es Hinweise auf *unbewusste*, affektiv gesteuerte Verwendungsschemata: z.B. Angst bzw. Selbstzweifel, eine sinnvolle Formel aufstellen zu können, oder Unzufriedenheit damit, etwas „nur“ zu zählen und nicht mit einer Formel berechnen zu können, aber auch fehlende Motivation, eine umfangreichere Tabelle durch mühsames Nachrechnen zu füllen.

5. Vorläufiges Fazit

Instrumente fixieren und „kristallisieren“ (vgl. Kern 2008) über zugehörige Verwendungsschemata *eigenes* erworbenes Erfahrungswissen, um daraus Nutzen ziehen zu können. Die eigenen Aufzeichnungen als „*epistemic mediator*“ etwa zum Zwecke einer instrumentierten Abduktion nutzen zu können, setzt die subjektive instrumentelle Genese auf der Grundlage eigener Erfahrung in einzelnen Handlungssituationen voraus, in denen Artefakt und subjektive Verwendungsschemata eigentätig wechselseitig angepasst werden. Mögliche Ansatzpunkte, die Nutzung der eigenen Aufzeichnungen zum Zwecke der Hypothesengenerierung im Unterricht zu fördern, liegen darin, das Aufzeichnen an sich zu kultivieren, z.B. mit Blick auf die Tafelnutzung. Übermäßig normierte und habituierte Verwendungsschemata für Aufzeichnungselemente wie Tabellen, Formeln, Skizzen, Fließtext könnten zudem gezielt geöffnet, flexible Meta-Strukturierungshilfen angeboten, eigene ausführliche Aufzeichnungen eingefordert und als wichtiges Arbeitsmaterial (nicht nur als Bepunktungsgrundlage) genutzt und wertgeschätzt werden, im Dialog zwischen Lehrperson und Lernendem, aber auch im Rahmen von regelmäßigem Peer-Tausch der Aufzeichnungen.

Literatur

- Kern, A. (2008). The use of key figures and its impact on activity: The case of a hospital (Vol. 72). Frankfurt: Peter Lang.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133–170.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.
- Magnani, L. (2004). Reasoning through doing. *Journal of Applied Logic*, 2, 439–450.
- Müller-Hill, E. (2017a). Ein handlungsorientiertes Konzept nomischer mathematischer Erklärung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38, 167–208.
- Müller-Hill, E. (2017b). Charakteristika des Zusammenspiels von Deduktion, Induktion und Abduktion beim situierten vs. systematischen Erklären. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*, 1141-1144.