Hartmut MÜLLER-SOMMER, Vechta

Unterrichtliche Zugänge zu ebenen Kurven

An ausgewählten Beispielen wird gezeigt, wie Schülerinnen und Schüler mit einem DGS zu geometrischen Entdeckungen gelangen können. Ausgangspunkte der Untersuchungen sind der pythagoreische Satz und die Figur des Thaleskreises. Durch Modifizieren, Analogisieren und Iterieren werden überraschende Zugänge zu ebenen Kurven eröffnet. Die Untersuchung der entdeckten Kurven kann den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen I und II bereichern und eine Vernetzung zwischen Geometrie und Algebra herstellen. Viele der erzeugten Kurven sind von historischer Bedeutung. Sie sprechen den Formensinn der Lernenden an und lassen sich häufig in einfacher Weise in Polarkoordinaten beschreiben.

1. Variationen zu pythagoreischen Dreiecken

Die Grundidee

Vorgegeben sind die beiden festen Punkte A und B mit dem Abstand c. Alle Dreieckspunkte C, die zu pythagoreischen Dreiecken ABC führen, liegen dann auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$. Die Ausgangsfrage für die weiteren Untersuchungen lautet nun: *Auf welcher Ortskurve liegen die Dreieckspunkte C, wenn die Dreiecksseiten nicht die übliche pythagoreische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, sondern eine Variation dieser Gleichung erfüllen?*

In welche Kurven „verformt" sich etwa der Thaleskreis, wenn beispielsweise die Variationsgleichung $a^2 + 2 \cdot b^2 = c^2$ oder $a^2 + 2 \cdot b = c^2$ erfüllt werden soll? Wir richten in einem DGS für die Seitenlänge a einen Schieberegler ein mit $0 \leq a \leq c$ und zeichnen um B einen Kreis mit dem Radius a. Soll der Punkt C die Variationsgleichung $a^2 + 2 \cdot b^2 = c^2$ erfüllen, so muss die Seitenlänge b der vorgegebenen Seitenlänge a „angepasst" werden. Um A wird also ein zweiter Kreis mit dem Radius $b = \sqrt{0{,}5 \cdot (c^2 - a^2)}$ gezeichnet. Die Schnittpunkte C und C_1 dieser beiden Kreise erfüllen die Variationsgleichung und liegen auf der gesuchten Ortskurve. Wird a variiert, so bewegen sich die Schnittpunkte auf der Ortskurve, die wir mit dem DGS aufzeichnen können. Eine analytische Beschreibung bestätigt, dass es sich dabei um einen Kreis durch A mit dem Radius $c/3$ handelt, dessen Mittelpunkt auf der Dreiecksseite $\overline{AB}$ liegt. Der analytische Nachweis kann in kartesischen Koordinaten oder in Polarkoordinaten erfolgen und greift dabei auf den Satz des Pythagoras bzw. auf den Kosinussatz zurück. Die Abbildung 1 veranschaulicht die dazugehörige Flächenaussage.

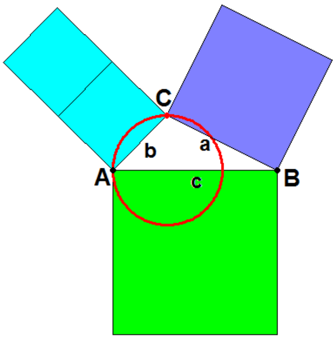

Abb. 1

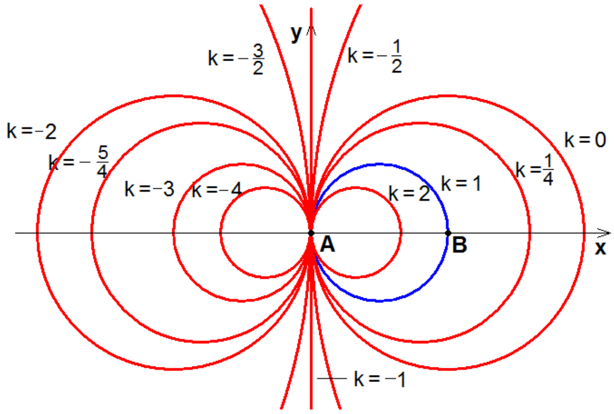

Abb. 2

Wir ersetzen in der Variationsgleichung $a^2 + 2 \cdot b^2 = c^2$ den Faktor 2 durch den Parameter $k \in \mathbb{R}$ und fragen nach der Ortskurve der Punkte C, die nun die Gleichung $a^2 + k \cdot b^2 = c^2$ erfüllen. Die Ergebnisse (s. Abb. 2) zeigen: Für $k \neq -1$ gibt es ebenfalls Kreise und für $k = -1$ stellt die y-Achse die Ortskurve dar.

Die Variation $a^2 + 2 \cdot b = c^2$

Die Ortskurvenkonstruktion führt uns auf eine *Pascalsche Schnecke*, benannt nach ihrem Entdecker *Etienne Pascal* (dem Vater von *Blaise Pascal*). Die nach b aufgelöste Gleichung liefert positive Werte für b, wenn $a < c$ ist. Die Punkte C liegen dann auf dem inneren Kurventeil. Gilt aber $a > c$, so ist $b < 0$. Die Punkte C liegen auf dem Außenteil der Kurve. Zur Konstruktion der vollständigen Ortskurve wählt man daher für den Radius des Kreises um A den *Betrag* von b. Die Abbildungen 3a und 3b, für die der Wert $c = 3$ gewählt wurde, visualisieren für die verschiedenen Lagen von C jeweils den Zusammenhang zwischen den entsprechenden Flächeninhalten: Liegt C auf dem Innenteil der Kurve, so gilt $a^2 + 2 \cdot b = c^2$. Für Punkte C auf dem Außenteil erfüllen die dazugehörigen Dreiecke die Gleichung $a^2 - 2 \cdot b = c^2$.

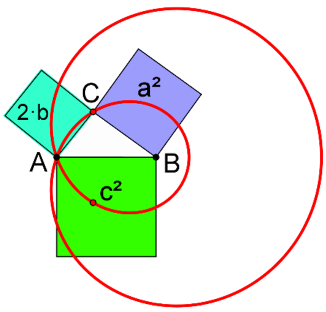

Abb. 3a

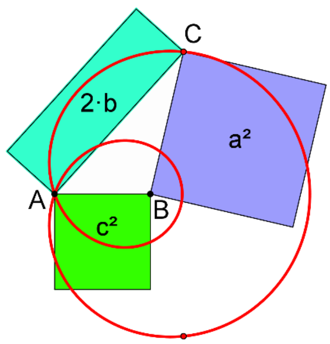

Abb. 3b

Weitere Variationsbeispiele

Die Variation $\boldsymbol{a^2 + a \cdot b = c^2}$ führt auf die *Trisektrix von MacLaurin*. Hier ist in den Dreiecken ABC der Nebenwinkel von β stets das Dreifache von α (s. Abb. 4a und 4b). Aufgrund dieser Eigenschaft hat *Colin MacLaurin* diese Kurve erstmals zur Winkeldreiteilung eingesetzt.

Mit der Gleichung $\boldsymbol{k \cdot a \cdot b = c^2}$ ($k \in \mathbb{R}$) eröffnet unsere Variationsstrategie offenbar auch einen „pythagoreischen“ Zugang zu den *Cassinischen Kurven*. Für $k = 4$ erhalten wir die *Bernoullische Lemniskate* (s. Abb. 5).

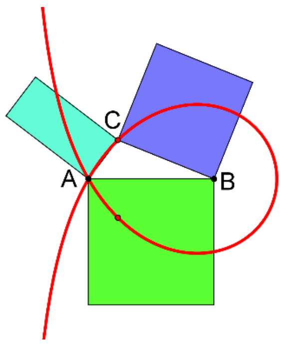

Abb. 4a

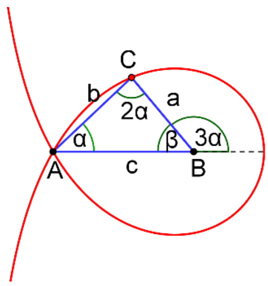

Abb. 4b

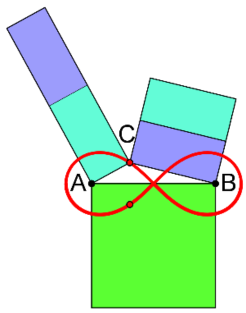

Abb. 5

2. Pythagoreische Vielecke

Die Figur des Thaleskreises führt zu einer weiteren Frage: *Was könnten wir uns unter einem pythagoreischen Viereck vorstellen?* Nahe liegend ist die Forderung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ mit $d = |\overline{AB}|$. Ein **pythagoreisches Viereck** dieser Art ist schnell konstruiert: Zeichen wir einen Thaleskreis über $\overline{AC}$ (s. Abb. 6), so liegen alle Punkte D, die zu einem solchen Viereck führen, auf diesem neuen Thaleskreis. Variiert C auf dem alten Thaleskreis, so entsteht eine Schar von Thaleskreisen, die eine neue Kurve einhüllen (s. Abb. 7).

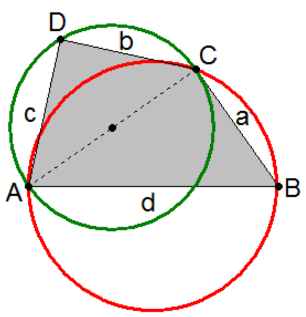

Abb. 6

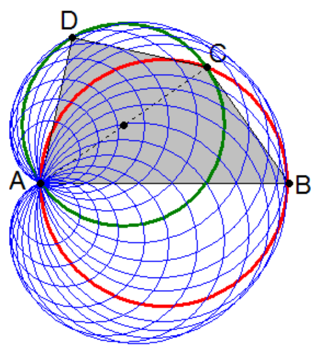

Abb. 7

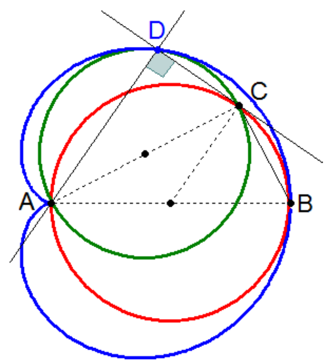

Abb. 8

Alle Viereckspunkte liegen innerhalb bzw. auf dem Rand dieser Hüllkurve. Sie ist also die **Extremalkurve** aller so definierten pythagoreischen Vierecke und erweist sich als Lotfußpunktkurve des alten Thaleskreises bezüglich des Punktes A. Es handelt sich um eine *Kardiode*. Der Punkt D in Abb. 8 liegt als Lotfußpunkt auf dieser Kardioide und auf der Tangente im Punkt C des ursprünglichen Thaleskreises.

Setzen wird die Konstruktionsidee fort, so gelangen wir zu pythagoreischen Fünfecken, deren Seitenlängen die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ erfüllen. Variiert D auf der Kardioide, so erzeugen die neuen Thaleskreise über $\overline{AD}$ ebenfalls eine extremale Hüllkurve. Sie ist die Lotfußpunktkurve der *Kardioide* bezüglich des Punktes A und wird als *Sextik von Cayley* bezeichnet. Der Eckpunkt E in Abb. 9 ist Lotfußpunkt und liegt auf der Hüllkurve.

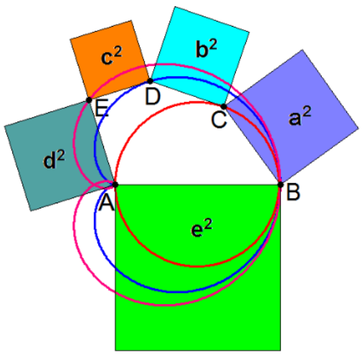

Abb. 9

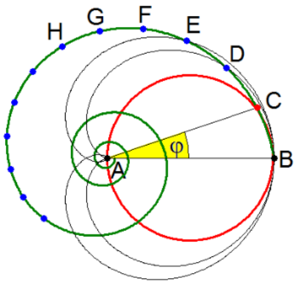

Abb. 10

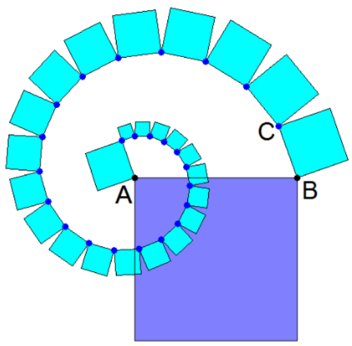

Abb. 11

Die Fortsetzung des Konstruktionsprozesses führt auf eine Hüllkurven*folge* iterierter Lotfußpunktkurven. Variiert C auf dem ursprünglichen Thaleskreis, so bewegen sich die Lotfußpunkte jeweils auf ihrer „eigenen“ Extremalkurve. Für einen festen Winkel $\varphi = \angle BAC$ $(0 < \varphi < \pi/2)$ liegen alle iterierten Lotfußpunkte auf einer *logarithmischen Spirale* mit dem Pol A (s. Abb. 10). Je kleiner φ ist, desto „schneller“ winden sich die Lotfußpunkte um A. Abb. 11 zeigt ein pythagoreisches Vieleck: Die Flächeninhalte der hellen Quadrate ergeben zusammen den Inhalt des großen dunklen Quadrats.

Literatur

Müller-Sommer, H. (2004). Variationen zum Satz des Pythagoras. In: *Der Mathematikunterricht 50, H. 4* (S. 57–65)

Weth, Th. (1999). *Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun*. Hildesheim: Franzbecker.