Silke NEUHAUS & Stefanie RACH, Paderborn

Beweisverständnis in der Studieneingangsphase – Konzeptualisierung und erste Ergebnisse

Der Übergang von der Schule in ein Mathematikstudium fällt vielen Studierenden schwer. Als ein Grund hierfür wird das Beweisen angeführt, welches in der Universität eine zentrale Aktivität darstellt. Neben der Beweiskonstruktion gehört zum Beweisen auch das Beweisverständnis, welches in der Literatur in eine lokale und eine globale Ebene unterteilt wird. In dieser Studie wurde ein Test zur Erhebung des Beweisverständnisses im Bereich der Zahlentheorie entwickelt. Es werden erste Ergebnisse der Pilotierung mit über 100 Teilnehmenden in einem Mathematikvorkurs vorgestellt. Außerdem wird diskutiert, welche individuellen Merkmale, vor allem bezogen auf schulische Leistungen, mit dem Beweisverständnis zusammenhängen könnten. Aus diesen Ergebnissen werden dann mögliche theoretische und praktische Implikationen gefolgert.

Theoretischer Hintergrund

Beweisen ist bereits zu Beginn der Studienzeit ein Hauptbestandteil eines Mathematikstudiums. In der Literatur werden vier Komponenten unterschieden, die zur Fähigkeit des Beweisens gezählt werden: Beweisverständnis, Beweiskonstruktion, Beweisvalidierung und Beweisevaluation (vgl. z. B. Selden & Selden, 2015). Unter Beweisvalidierung und Beweisevaluation wird verstanden, inwiefern Studierende einschätzen können, ob ein Beweis valide, also vollständig richtig ist, und zusätzlich evaluieren können, ob der Beweis „gut“ aufgeschrieben ist. Die Beweiskonstruktion beinhaltet das Konstruieren von eigenen Beweisen, während sich das Beweisverständnis auf das Verstehen von geschriebenen, korrekten Beweisen bezieht.

Diese letzte Komponente, das Beweisverständnis, wird von Studierenden in den ersten Semestern häufig benötigt. Sie müssen die Beweise verstehen, die ihnen der Dozent bzw. die Dozentin in der Vorlesung präsentiert oder die in Skripten und Lehrbüchern stehen. Dazu müssen die Studierende die Beweise nicht nur auf Basis der grammatikalischen Zusammenhänge verstehen, sondern zusätzlich auch ein tiefergehendes Verständnis aufbauen. Damit können sie z. B. die im Beweis genutzten Methoden und Begründungen auf eigene Beweiskonstruktionsprozesse übertragen. Trotzdem gibt es zu dieser Komponente des Beweisens nur wenig Forschungsarbeit (vgl. z. B. Mejía-Ramos et al., 2009). Ein Grund dafür könnte sein, dass Beweisverständnis zunächst messbar gemacht werden muss. Um dies zu realisieren, haben Mejía-Ramos et al. (2011) basierend auf Yang und Lin (2008) und Conradie und Frith (2000) ein Modell für das Beweisverständnis entwickelt. Dieses Modell beinhaltet sieben Dimensionen ohne hierarchische Gliederung, die in zwei Gruppen geteilt werden. Auf der lokalen Ebene soll der Beweis auf Basis einzelner Aussagen verstanden werden. Dazu gehören die *Bedeutung von Termen und Aussagen*, der *logische Status von Aussagen und „proof framework“* und die *Begründung von Aussagen*. Auf einer eher globalen Ebene soll der Beweis im Gesamten verstanden werden. Hierzu gehören das *Zusammenfassen der Hauptideen*, das *Identifizieren der modularen Struktur des Beweises*, der *Transfer der allgemeinen Ideen oder Methoden auf einen anderen Kontext* und das *Illustrieren des Beweises mit Beispielen*. Mit diesem Modell wurde in dieser Studie ein Beweisverständnistest zu einem Beweis aus der Zahlentheorie entwickelt. Damit soll das Beweisverständnis von Studierenden am Anfang ihres Studiums näher beleuchtet werden, um u. a. individuelle Merkmale zu identifizieren, die mit dem Beweisverständnis zusammenhängen könnten.

Forschungsfragen

Die Beantwortung der folgenden Fragestellungen soll Hinweise für die Güte des entwickelten Instruments liefern:

- Welches Beweisverständnis haben Studierende mit mathematischen Studienfächern in der Studieneingangsphase bezüglich eines Beweises aus der Zahlentheorie? Lassen sich die theoretisch definierte lokale und globale Ebene des Beweisverständnisses empirisch belegen?
- Welche individuellen Merkmale, insbesondere verschiedene Schulleistungen, hängen mit dem individuellen Beweisverständnis zusammen?

Methode

Es wurde ein Beweisverständnistest mithilfe des Modells von Mejía-Ramos et al. (2011) entwickelt. Zusätzlich diente auch ein von Hodds et al. (2014) bereits genutzter Test als Vorbild. Die verschiedenen Phasen der Testentwicklung sind angelehnt an Mejía-Ramos et al. (2017). Zuerst wurde ein Beweis aus dem Bereich der Zahlentheorie ausgewählt, der nur wenig Vorwissen von den Studierenden benötigt. Dann wurden zu den verschiedenen Dimensionen des Modells zum Beweisverständnis offene Items formuliert. Diese offenen Fragen wurden fünf studentischen Hilfskräften aus dem Bereich des Lehramts für Gymnasium und Haupt-, Real- und Gesamtschule in Interviews gestellt, um Distraktoren für Multiple-Choice-Items zu generieren. Dabei wurden einige Items als zu schwierig eingestuft und aus dem Test entfernt. Außerdem wurden einige Items als offene Fragen belassen, wenn die Generierung von Distraktoren nicht möglich erschien. Zusätzlich wurde der Test mit einigen Expertinnen und Experten aus dem Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) diskutiert.

Der entwickelte Test beinhaltet 11 Items zum Beweisverständnis. Dabei sind 6 Items auf der lokalen und 5 Items auf der globalen Ebene einzuordnen, wobei ein Item auch einen Transfer in die Beweiskonstruktion beinhaltet. Die offenen Items wurden doppelt kodiert mit den Werten 0, 0,5 und 1. Jede weitere Itembearbeitung wurde dichotom mit 0 und 1 kodiert. Der Test wurde als Paper & Pencil-Test während eines mathematischen Vorkurses an einer deutschen Universität ausgeteilt. Die Stichprobe besteht aus 114 Teilnehmerinnen und Teilnehmern eines mathematikbezogenen Vorkurses vor dem Beginn eines stark mathematikhaltigen Studiums (zum Beispiel Mathematik, Wirtschaftsmathematik oder Lehramt mit Fach Mathematik). Es wurden die Abiturnote ($M = 2{,}06$, $SD = 0{,}68$), die letzte schulische Deutschnote in Punkten ($M = 8{,}74$, $SD = 3{,}49$) und die letzte schulische Mathematiknote in Punkten ($M = 11{,}27$, $SD = 3{,}02$) erfragt.

Ergebnisse

Die verschiedenen Antwortmöglichkeiten der Multiple-Choice-Items wurden empirisch untersucht. Ziel dabei war es, herauszufinden, ob sich die falschen Antworten als Distraktoren eigenen. Zum Beispiel wurde das unten angegebene Item von 111 Studierenden mit der folgenden Verteilung beantwortet:

Welche Art von Beweis wurde hier verwendet?

- ☐ Vollständige Induktion (15,3%)
- ☐ Beweis durch Widerspruch (9,9%)
- ☐ Direkter Beweis (richtig, 59,5%)
- ☐ Beweis durch Kontraposition (15,3%)

Selbst bei diesem Item wurden die zunächst als „zu leicht“ vermuteten Distraktoren wie „vollständige Induktion“ ausgewählt. Bei anderen Items mussten die Distraktoren geringfügig überarbeitet werden. Die einzelnen Items weisen einen Mittelwert von 0,49 bis 0,96 ($SD = 0{,}19$-$0{,}50$) auf. Die Reliabilität des Beweisverständnistests ($M = 6{,}25$, $SD = 2{,}37$) kann als zufriedenstellend bezeichnet werden. Es wurde untersucht, ob sich eine lokale und eine globale Ebene des Beweisverständnisses trennen lassen. Eine Faktorenanalyse zeigte keine Evidenz dafür. Die Abiturnote und die letzte

Schulnote in Deutsch korrelieren mit mittlerer Stärke mit dem Beweisverständnis. Die letzte schulische Mathematiknote korreliert nicht signifikant mit dem Beweisverständnis.

Diskussion

Es wurde ein Beweisverständnistest zu einem Beweis aus der Zahlentheorie entwickelt. Während der Studie sind Herausforderungen aufgetreten, die bei Testentwicklungen zu bedenken sind. So sind manche Dimensionen des Modells von Mejía-Ramos et al. (2011) in einem Test bestehend aus Multiple-Choice-Items schwierig umzusetzen. Beispielsweise ist ein Transfer der Hauptideen eines Beweises schwierig zu erfragen, ohne eine neue Aussage beweisen zu lassen.

Insgesamt hängt das Beweisverständnis mit schulischen Leistungen zusammen. Allerdings korreliert die letzte schulische Mathematiknote unerwartet nicht mit dem Beweisverständnis. Ein Grund dafür kann die bereits sehr hohe mathematische Durchschnittsnote in dieser Stichprobe sein, so dass ein Deckeneffekt aufgetreten sein könnte. Die Korrelation der letzten schulischen Deutschnote mit dem Ergebnis des Beweisverständnistests gibt einen Hinweis auf einen bedeutenden Zusammenhang zwischen Beweisverständnis und Leseverständnis, was in weiteren Studien untersucht werden soll.

Literatur

Conradie, J. & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 225-35.

Hodds, M., Alcock, L. & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62-101.

Mejía-Ramos, J. P. & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education*, 2, 88-93.

Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2011). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Mejía-Ramos J. P., Lew, K., Torre, J. d. l. & Weber, K. (2017) Developing and validating proof comprehension tests in undergraduate mathematics, *Research in Mathematics Education, 19*(2), 130-146

Selden, A. S. J., & Selden, J. (2015). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline Conference Proceedings*, 339-345.

Yang, K.-L. & Lin, F.-L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 59-76.