

## **Problemlösen: Zugänge zu kindlichen Lösungsräumen und fachmathematischem Hintergrund**

Immer wieder wird bemängelt, dass angehende Lehrkräfte kaum Zusammenhänge zwischen dem Studium der Fachmathematik und ihrem späteren Beruf sehen. Blömeke (2009) verweist darauf, dass dies auch aus der Studienorganisation resultieren könnte, mit der verschiedene Inhalte in verschiedenen Fakultäten gelehrt werden und kaum „Systematische Verknüpfungen in Form von inhaltlichen Abstimmungen oder Kooperationen über die Phasen bzw. über Fakultätsgrenzen hinweg“ stattfinden (a.a.O., S. 486). Studierende müssen sich die Bedeutung sowie die Verknüpfung der verschiedenen Teildisziplinen des Lehramtsstudiums für ihre zukünftige Berufstätigkeit erarbeiten. Ihr Studium verfolgt dabei ein doppeltes Ziel: die eigene Enkulturation in das Fachgebiet Mathematik und die Vorbereitung darauf, zukünftig Schülerinnen und Schülern mathematische Inhalte zugänglich zu machen und gleichzeitig in die Kultur des Faches einzuführen.

Weder die Bedeutung des fachwissenschaftlichen Studiums noch des fachdidaktischen Studiums sind dabei umstritten. In ihrem Review verweisen Stahnke et al. (2016) u.a. auf die Schwierigkeiten von Lehramtsstudierenden, Lernprozesse von Kindern zu begleiten und auf Schwierigkeiten von Lehrkräften, Aufgaben hinsichtlich ihres Potenzials zu beurteilen. Beide Kompetenzbereiche basieren auf ausreichendem mathematischem Hintergrundwissen. Die Begleitung der Kinder in ihren Lernprozessen umfasst ebenfalls deren Wahrnehmung und Deutung. Um insbesondere unter der Perspektive von Inklusion diesen Anforderungen gerecht zu werden, sind im Unterrichtsprozess differenzierte Kompetenzen in der Analyse der Situation des Kindes, verbunden mit ebensolchen bezogen auf die Anforderungen des mathematischen Inhalts, notwendig.

Ein Bereich, in dem diese Anforderung besonders hoch ist, stellt das Problemlösen dar. Studierende lernen zwar Heuristiken im Verlauf des Studiums kennen, aber bedingt durch den Charakter des Problemlösens wird die eigentliche Problemlösekompetenz nur durch aktives eigenes Problemlösen erworben.

Diese Gesichtspunkte berücksichtigend haben die Autorinnen Koch und Nolte ein Semarkonzept entwickelt und mehrmals erprobt, das darauf basiert im fachdidaktischen Seminar zunächst Studierenden Gelegenheiten zu bieten, mathematische Problemstellungen zu bearbeiten, die sich für einen Einsatz in der Grundschule und darüber hinaus eignen. Im anschließenden fachmathematischen Seminar werden die mathematischen Hintergründe der

jeweiligen Problemstellungen erarbeitet, d.h. die Studierenden befassen sich mit Fragen der Übersetzung und Verallgemeinerung der ursprünglichen Aufgabe in die fachmathematische Sprache. Diese abstrakten Versionen werden fachmathematisch untersucht; dabei werden Muster und Strukturen, die im Verlauf der eigenen Bearbeitung der Aufgaben im fachdidaktischen Seminar erkannt wurden, bewiesen. Wichtig sind darüber hinaus Existenz- und Eindeutigkeitsfragen hinsichtlich der Lösungsmenge des jeweiligen Problems. Die Abfolge der Problemstellungen ermöglicht es ebenfalls zu erkennen, dass verschiedenartig aussehende Problemlöseaufgaben fachmathematisch auf ein- und dieselbe Weise behandelt werden können (Mathematik als "Universalwerkzeug").

### **Zum Aufbau und zur Gestaltung der Seminare**

Aufgrund der Erfahrungen mit Referaten von Studierenden zu didaktischen Ansätzen zum Problemlösen, werden theoretische Aspekte zum Problemlösen von M. Nolte eingebracht, bevor die Problemstellung vorgestellt wird. Die weitere Arbeit basiert auf der Simulation von Unterricht. Die Studierenden werden aufgefordert, neben der Bearbeitung der Problemstellungen ihre eigenen Haltungen und Einstellungen zu reflektieren, sich mit Emotionen im Problemlöseprozess auseinander zu setzen und Überlegungen zur Arbeit im zukünftigen Unterricht anzustellen. „wie kann ich Ängste abbauen?“, „wann und wie gebe ich Hilfen?“, „wie weit bearbeite ich ein Problem in einer Gruppe?“, „wie gehe ich mit unterschiedlichen Herangehensweisen um?“ und „wie kann ich das Problem in heterogenen Gruppen bearbeiten und aufgreifen?“ sind einige der dabei diskutierten Fragen.

Die meisten Problemstellungen werden jeweils über zwei Sitzungen bearbeitet. Das jeweils erste fachdidaktische Seminar fokussiert dabei auf die Bearbeitung des Problems auf möglichst vielen verschiedenen Wegen. Das zweite fachdidaktische Seminar hat zum Inhalt Aufgabenvorgaben zu variieren, um mit der Variation von Anforderungen an Bearbeitungsprozesse eine Sensibilität für heterogene Lernvoraussetzungen bei Kindern zu entwickeln. Basierend auf den eigenen Erfahrungen entwickeln Studierende ein Arbeitsblatt zur Aufgabenstellung der Sitzung, das sie mit einem oder mehreren Kindern erproben und in der darauffolgenden Woche vorstellen.

Aufgaben mit verwandten Inhalten wiederholen sich nach sechs Sitzungen. So werden in den ersten beiden Sitzungen Zauberdreiecke behandelt und in der siebten und achten Sitzung magische Quadrate und andere Formen von Zauberfiguren. Dies hat zum Ziel Zugang zum Lernfortschritt der Studierenden zu bekommen. Es gibt jedoch auch Aufgaben, deren Inhalte sich nicht systematisch wiederholen. In einer Studie, die Amtsfeld durchführte,

wurde an ausgewählten Aufgaben der Lernfortschritt der Studierenden in einem Semester überprüft.

Im fachmathematischen Seminar gestalteten Studierende eine Sitzung, zu der sie zuvor einen Aufsatz geschrieben hatten. Es findet dabei ein Wechsel zwischen Phasen des Referierens und Phasen von Aktivitäten der Gesamtgruppe überwiegend zum Beweisen statt. Zum Beispiel zu Zauberfiguren erarbeiteten die Studierenden die algebraische Beschreibung der Menge aller Zauberdreiecke, den Beweis eines allgemeingültigen Zusammenhangs zwischen einer Eckzahl und deren gegenüberliegender Mittelzahl, den Nachweis einer allgemeingültigen Teilbarkeitseigenschaft, die Bestimmung aller möglichen Fixsummen des Zauberdreiecks (mit Beweis) sowie die Bildung einer Quotientenmenge (wesentlich verschiedene Zauberdreiecke) auf der Grundlage gruppentheoretischer Überlegungen zum gleichseitigen Dreieck (Symmetriegruppe): Zwei Zauberdreiecke werden als äquivalent betrachtet, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen.

### **Methode**

An den Seminaren nahmen 23 Lehramtsstudierende (BA) Primar- und Sekundarstufe 1 im 2., 4. oder 6. Semester teil. Darunter waren 12 Studierende, die nicht Mathematik als Fach hatten und nur am fachdidaktischen Seminar teilnahmen (Gruppe D) und 11 Studierende, die Mathematik als Fach hatten und beide Seminare besuchten (Gruppe DM). Grundlage für die Datenerhebung waren Portfolios, in denen die Studierenden ihre Arbeiten im Seminar sammelten sowie Reflexionsfragen beantworteten. Anhand ausgewählter Aufgaben wurde erhoben, wie sich zu Beginn und im Verlauf des Seminars die Fähigkeiten der Studierenden entwickelten, Aufgaben algebraisch zu beschreiben und die Vielfalt an Herangehensweisen zu steigern. Zur Erfassung dieser Entwicklung wurde der Ansatz von (Leikin, 2007, 2009; Leikin & Levav-Waynberg, 2007), Kreativität anhand von Lösungsräumen zu erfassen, verwendet.

### **Zu den Ergebnissen**

Ein Vergleich zwischen der ersten Erhebung und der letzten Erhebung zeigt einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Besuch des fachdidaktischen Seminars und der Bearbeitung von Problemaufgaben und der Steigerung der mathematischen Kreativität für beide Gruppen. Bei Studierenden, die beide Seminare besuchten, zeigten sich bessere Leistungen hinsichtlich der Bearbeitung von Aufgaben mit vergleichbarem mathematischem Hintergrund. Die Ergebnisse können eher als Hinweise gewertet werden, allerdings wird diese Vermutung durch die Beobachtung gestützt,

dass das nicht für Aufgaben galt, die einen anderen mathematischen Hintergrund hatten. Die Gruppe der Studierenden, die beide Seminare besuchte, steigerte die Verwendung algebraischer Formulierungen kontinuierlich. Bei der Gruppe, die allein das Didaktikseminar besuchte, stieg ebenfalls der Anteil algebraischer Formulierungen, allerdings nur bei Problemstellungen die einen ähnlichen mathematischen Hintergrund aufwiesen, wie bereits zuvor behandelte Problemaufgaben".

Die Aussagen der Studierenden lassen vermuten, dass sie ebenfalls einen deutlichen Zuwachs zur Beurteilung des Potenzials von Aufgaben erzielten.

## Diskussion

Die Gruppe der Studierenden war klein. Es fehlten verschiedene Erhebungen wie z.B. die der mathematischen Vorkenntnisse, um den Leistungszuwachs differenzierter beurteilen zu können. Sowohl die Aussagen der Studierenden und ihre Aufgabenbearbeitungen als auch die Videopräsentationen, die ihren Umgang mit den Problemstellungen als Lehrperson mit Kindern zeigten, lassen jedoch diese Seminarform als sinnvoll erscheinen. Dabei betonen die Studierenden ihren eigenen Leistungszuwachs, Einstellungsänderungen gegenüber der Selbstwirksamkeit bezüglich Problemlösen und die Bedeutung des mathematischen Hintergrundwissens für die angemessene Tiefe des Zugangs zu Aufgabenstellungen.

## Literatur

- Blömeke, S. (2009). Lehrerbildung. In S. Blömeke, T. Bohl, L. Haag, G. Lang-Wojtasik & W. Sacher (Eds.), *Handbuch Schule : Theorie – Organisation – Entwicklung* (pp. 483- 489). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Leikin, R. (2007). *Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks*. The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 5. (pp. 2330-2339). Available: <http://ermeweb.free.fr/Cerme5.pdf> (PDF File)
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.
- Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. [journal article]. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349-371. doi: 10.1007/s10649-006-9071-z
- Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. [journal article]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 48(1), 1-27. doi: 10.1007/s11858-016-0775-y