Daniel NOLTING, Jan-Hendrik DE WILJES & Martin KREH, Hildesheim

Das Hildesheimer Proseminar – Förderung mathematischer Arbeitsweisen am Studienanfang

Mathematische Arbeitsweisen umfassen eine Vielzahl an Aktivitäten. Das Hildesheimer Proseminar befasst sich im Speziellen mit der Förderung des Beweisens. Im Mittelpunkt steht die Frage, wie Beweisen in der GHR Lehramtsausbildung verankert werden kann und welche Themen sich für das Beweisen als ergiebig erweisen.

Ausgangslage

Im Rahmen des Projekts „Hildesheimer Stufen zum Einstieg in die Mathematik bzw. das erste Studienjahr (HiStEMa)" (vgl. Hamann et al., 2014) sollen GHR Lehramtsstudierende in mathematisches Arbeiten eingeführt werden; dazu zählt selbstverständlich auch das Beweisen. Diese mathematische Tätigkeit findet sich in Hildesheim zwar ab dem ersten Studienjahr in Fachvorlesungen (Lineare Algebra, Geometrie) wieder, das eigenständige Verstehen von Beweisen wird aber erst im fachwissenschaftlichen Seminar im fünften oder sechsten Semester notwendig. Damit Studierende bereits früher mit diesem Aspekt des Beweisens in Kontakt kommen, wurde ein Proseminar im zweiten Semester eingeführt.

Didaktische und theoretische Einordnung

Der Begriff des Beweises umfasst sehr viele Aspekte, so dass eine einheitliche Definition in der Forschung nicht zu finden ist. Aufgrund seiner Kompaktheit sehen wir den Versuch von Jahnke & Ufer (2015, 331) als günstig an: „Unter einem mathematischen Beweis versteht man die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregel." In vielen fachmathematischen Texten kommen Beweise vor, welche dem Anspruch nach vollkommen streng formuliert sein sollten.

„Diese Idealvorstellung ist grundsätzlich nicht realisierbar. […] Stattdessen beweist der praktizierende Mathematischer auf einem halbformalen Level, das anschauliche Argumente, Rückgriff auf Diagramme und Beweislücken einschließt. Das Ideal einer vollständig formalisierten Schlusskette besteht nur dem Anspruch nach […]" (ebd., 332)

Die Diskrepanz zwischen theoretischem Anspruch und praktizierter Wirklichkeit ist auf unterschiedliche Gründe zurück zu führen, allerdings ergibt sich aus der lückenhaften formalisierten Schlusskette die größte Schwierigkeit beim Beweisverständnis (vgl. Houston, 2011, 143).

Um das Beweisverständnis, welches eines der vier mit dem Begriff Beweis verbundenen Konzepte ist (vgl. Selden & Selden, 2017, 1f.), zu unterstützen, können verschiedene Strategien angewendet werden (übersetzt nach Weber, 2015, 289):

- versuchen, einen Satz selbst zu beweisen, bevor man den Beweis liest
- die im Beweis benutzte grundlegende Struktur identifizieren
- den Beweis in Teilbeweise zerlegen
- komplizierte Behauptungen des Beweises anhand einen Beispiels illustrieren
- die benutzte Beweismethode mit dem eigenen Ansatz vergleichen

Für Studierende des GHR-Lehramts sind insbesondere die drei mittleren Strategien ein Zugangsweg zum Beweisverständnis. Ableitinger (2012, 106f.) stellt heraus, dass Struktursinn und Symbolverständnis sowie verschiedene heuristische Strategien notwendige kognitive Fertigkeiten im Prozess des Beweisverständnisses darstellen. Aus diesem Grund wurden für das Proseminar Themen ausgewählt, welche die Studierenden in den ersten beiden Semestern kennen gelernt haben.

Das Verständnis eines Beweises kann (übersetzt nach Mejia-Ramos et al., 2012) auf zwei Ebenen geschehen:

- lokale Aspekte
    1. Bedeutung von Termen und Aussagen
    2. logischer Status von Aussagen und grundlegende Beweisstruktur
    3. Begründungen von Behauptungen
- ganzheitliches Verständnis eines Beweis
    1. Zusammenfassen durch Ideen von einem höheren Standpunkt aus
    2. die modulare Struktur identifizieren
    3. die Grundideen oder Methoden auf einen anderen Kontext übertragen
    4. anhand von Beispielen illustrieren

Im Proseminar stehen in der Vorbereitung für die Studierenden die *local aspects* im Vordergrund, während der Präsentation und des Reflexionsgespräches steht ergänzend die *holistic comprehension of a proof* im Mittelpunkt. Die Thematisierung des zweiten Aspekts erfordert ein tiefergehendes Verständnis des Beweises und eine Kenntnis der verschiedenen Strategien, welche in einem Gespräch erarbeitet werden können.

Organisation „Hildesheimer Proseminar“

Das Proseminar ist in der Studienordnung im 2. Studiensemester mit einem Arbeitsaufwand von 0.5 CP verortet. Die Studierenden erhalten ca. 3 Wochen vor dem Seminartermin einen mathematischen Satz inklusive des Beweises und müssen diesen selbstständig durchdringen. Vor einer Kleingruppe von 6 Studierenden und einem/r wissenschaftlichen Mitarbeiter/in präsentieren die Studierenden den erarbeiteten Beweis und beantworten mögliche Rückfragen sowie Ergänzungen. In der anschließenden Reflexion wird durch die Mitarbeiter/innen eine Rückmeldung zum Vortrag und zum Vorgehen bei der Erarbeitung des Beweises gegeben, damit die Strategien zum Beweisverständnis (vgl. Weber, 2015, 289) thematisiert werden.

Das Hauptziel, welches mit dem Proseminar verfolgt wird, ist die Förderung der Beweiskompetenz, insbesondere der Teilaspekt Verstehen von Beweisen (vgl. Selden & Selden, 2017, 1f.). Darüber hinaus werden die Studierenden im mathematischen Kommunizieren (Vortrag) und Darstellen (Notieren des Beweises) geschult. Die anschließende Reflexion in der Kleingruppe über den Beweis fördert eine elaborierte Sichtweise auf den eigenen, aber auch auf fremde Beweise.

Inhalte und Beispielaufgaben

Die verwendeten Aufgaben stammen größtenteils aus einem Buch von Specht & Strich (2009). Dieses hat, ähnlich wie andere verwendete Quellen, den Vorteil, dass in den angegebenen Beweisen nur sehr wenige Erläuterungen selbständig gefunden werden müssen.

Die Aufgaben sind in den Bereichen Geometrie, Lineare Algebra und Kombinatorik angesiedelt, also in Gebieten, die den Studierenden bereits bekannt sind. Neben einer großen Bandbreite an diesen Bereichen sollen in jeder Proseminargruppe möglichst viele verschiedene Beweistechniken (Induktion, Widerspruchsbeweis,...) thematisiert werden.

Typische Aussagen sind:

- In einem Dreieck teilt jede Halbierende eines Innenwinkels (Außenwinkels) die gegenüberliegende Seite innerlich (äußerlich) im Verhältnis der anliegenden Seiten.
- Es ist $4^n(n!)^2 \leq (n+1)(2n)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zu zeigen.

Die Beweise können an dieser Stelle nicht angegeben werden, finden sich aber etwa im ersten Fall im oben genannten Buch.

Ausblick und mögliche weitere Forschungsansätze

Erste Ergebnisse einer gerade stattfindenden Evaluation lassen vermuten, dass das Proseminar den erwünschten Effekt hat. Zur Verstärkung bedarf es aber weiterer Untersuchungen und gegebenenfalls der Einführung einer weiteren ähnlichen Veranstaltung zwischen Proseminar und fachwissenschaftlichem Seminar.

Zur weiteren Unterstützung des Verstehens von Beweisen ist ferner eine kontinuierliche Förderung (mit gegebener Notwendigkeit in Form von Studienleistungen) innerhalb von Fachvorlesungen geplant.

In diesem Zusammenhang sollten sicherlich auch die Präsentationen der Studierenden qualitativ untersucht und mit den Ergebnissen die Auswahl der Aufgaben reflektiert/überprüft und gegebenenfalls angepasst werden.

Literatur

Ableitinger, C. (2011). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*, 87–111.

Hamann, T., Kreuzkam, S., Schmidt-Thieme, B. & Sander, J. (2014). „Was ist Mathematik" Einführung in mathematisches Arbeiten und Studienwahlüberprüfung für Lehramtsstudierende. In I. Bausch et al. (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven* (S. 375–388). Wiesbaden: Springer.

Houston, K. (2011): *Wie man mathematisch denkt – Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger*. Berlin: Springer Spektrum.

Jahnke, H. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–353). Heidelberg: Springer.

Mejia-Ramos, J., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012): An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*, 3–18.

Selden, A. & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Eds.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline.* Proceedings der khdm-Konferenz 2015. khdm-Report 17-05 (pp. 340-346). Kassel: Universitätsbibliothek. https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121/5/khdm_report_17_05.pdf

Specht, E. & Strich, R. (2009): *geometria – scientiae atlantis 1*. Magdeburg: Otto-von-Guericke-Universität.

Weber, K. (2015). Effective Proof Reading Strategies for Comprehending Mathematical Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1(3),* 289–314.