

Norbert OLEKSIK, Würzburg

## **Das Lösen von Gleichungen mit CAS – als Bestandteil einer Lehrerfortbildung**

Im Strategiepapier „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF), wird der Digitalisierung in der schulischen Bildung eine große Bedeutung zugeschrieben. Digitale Medien sollen von den Lernenden nicht nur zu Unterhaltungszwecken, sondern auch zur Bildung genutzt werden (vgl. BMBF, 2016). Dabei wird betont, dass der Einsatz digitaler Medien dem „Primat der Pädagogik“ folgen und keinen Selbstzweck darstellen soll, sondern einen bildenden Zweck erfüllen muss (vgl. ebd., S.5f.). Das setzt jedoch voraus, dass Lehrkräfte dazu in der Lage sind digitale Technologien bildend einzusetzen.

Als ein Ergebnis der Studie „Schule Digital. Der Länder Koordinator“, geht hervor, dass sich Lehrkräfte Unterstützung wünschen, wenn es darum geht die Kompetenzen der Lernenden im Umgang mit digitalen Technologien zu fördern (vgl. Deutsche Telekomstiftung, 2017). Dies deutet auf einen Fortbildungsbedarf hin. Daher knüpft das im Nachfolgenden skizzierte Projekt in der dritten Phase der Lehrerbildung, nämlich der Lehrerfortbildung, an. Die Maßnahme verfolgt als Ziel, Lehrkräfte dazu zu befähigen digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht einzusetzen.

Soll sich das Handeln einer Lehrperson im Unterricht verändern, so erscheint eine Verschränkung von Input-, Handlungs- und Reflexionsphasen in einer Fortbildungsmaßnahme unabdinglich (vgl. Lipowsky & Rzejak, 2012). Diese Verschränkung wiederum, lässt sich in einmalig stattfindenden Veranstaltungen nur bedingt erreichen, weshalb eine längerfristige Fortbildungsdauer eine wichtige Voraussetzung für das Erreichen einer Wirkung auf der unterrichtspraktischen Ebene zu sein scheint (vgl. ebd.). Die örtliche und zeitliche Unabhängigkeit eines Online-Kurses scheint hierfür geeignet, da dieser eine mit dem Arbeitsalltag vereinbare Teilnahme insbesondere über einen längeren Zeitraum ermöglicht. So kann das Online Gelernte im Unterricht zu erprobt und im Anschluss reflektiert werden.

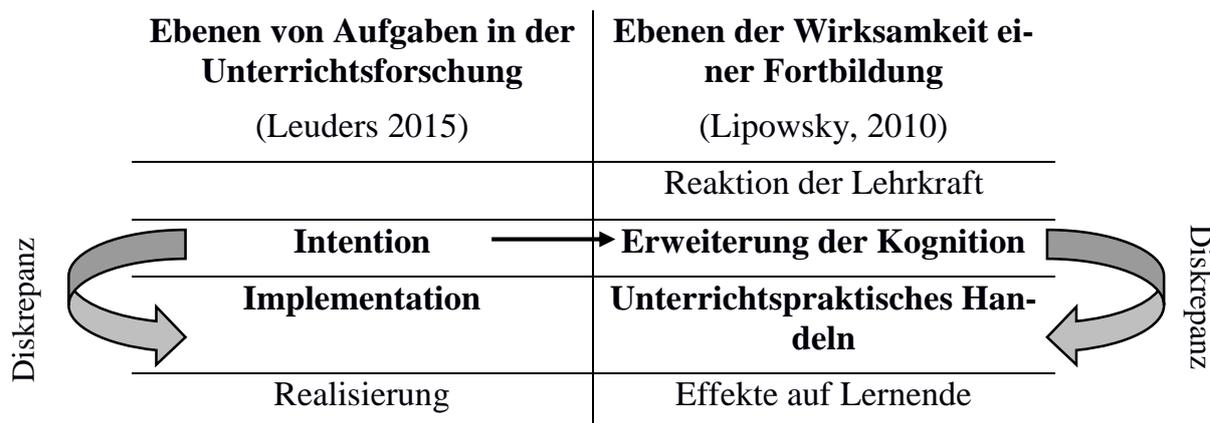
Im Folgenden wird ein Modell zur Wirksamkeit der Fortbildung vorgestellt. Anschließend, wird anhand des Themas „Lösen von Gleichungen“ exemplarisch ein Inhalt der Fortbildung aufgezeigt.

## Wirksamkeit der Fortbildung

Fortbildungen für Lehrkräfte können auf verschiedenen Ebenen eine Wirkung erzielen. Sie können einen Einfluss auf die Reaktionen und Einschätzungen der Teilnehmenden haben und / oder ihre Kognition erweitern. Außerdem kann sich die Maßnahme auf das Verhalten der Lehrperson im Unterricht auswirken und darüber hinaus letztlich auch eine Wirkung auf die Schülerinnen und Schüler erzielen (vgl. Lipowsky, 2010).

Ziel der Fortbildung ist es Wirkungen auf unterrichtspraktischer Ebene zu erreichen, sodass didaktische Konzepte anhand von Aufgaben vermittelt werden, um so eine mögliche Diskrepanz zwischen dem Gelernten und dem praktischen Handeln zu minimieren (vgl. Abb. 1).

Allerdings ist es mit dem Einsatz von geeigneten Aufgaben im Unterricht alleine nicht getan. Auch hier kann es Diskrepanzen zwischen der Intention einer Aufgabe und der Umsetzung dieser Aufgabe im Unterricht geben (vgl. Leuders, 2015). Auch diese Diskrepanz gilt es zu minimieren, um zu gewährleisten, dass der Einsatz digitaler Werkzeuge keinen Selbstzweck darstellt.



**Abb. 1:** Modell zur Minimierung der Diskrepanzen, um eine Wirksamkeit auf unterrichtspraktischer Ebene zu erzielen

Um die Wirksamkeit zu prüfen soll ermittelt werden, ob die teilnehmenden Lehrkräfte die Intention der Aufgaben verstehen und verinnerlichen (vgl. Abb. 1) und, ob die Aufgaben im Unterricht eingesetzt werden. Dadurch sollen mögliche Diskrepanzen identifiziert werden. Im besten Fall verinnerlicht die Lehrkraft die Idee der Aufgaben und setzt diese ebenso im Unterricht um.

### „Lösen von Gleichungen mit CAS“ – ein Inhalt exemplarisch

Zunächst gilt es zu klären wie Gleichungen mittels digitaler Technologien, insbesondere bei der Wahl eines Computer-Algebra-Systems (CAS), gelöst werden können. Bei den in Schulen üblichen Varianten (GeoGebra, Nspire

CAS, Classpad) verfügen die Handhelds bzw. die Software auch über dynamische Geometriesoftware, sowie Tabellenkalkulationsprogramme (vgl. Barzel, 2012). Da im Allgemeinen also vielmehr ein Softwarepaket als nur ein CAS vorliegt, besteht eine große Vielfalt an Einsatzmöglichkeiten, die es zu berücksichtigen gilt.

Je nach Art der Gleichung eignen sich gewisse Methoden besser zum Lösen als andere. So lassen sich lineare Gleichungen in der Regel relativ unkompliziert durch Äquivalenzumformungen lösen, während quadratische Gleichungen im Allgemeinen mittels Lösungsverfahren gelöst werden. Goniometrische Gleichungen oder Gleichungen dritten (oder höheren) Grades lassen sich mit schulischen Mitteln im Allgemeinen nur noch anhand von (numerischen) Näherungsverfahren lösen (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 259f.). So können mittels Tabellenkalkulationen systematisch Werte in eine Gleichung eingesetzt werden und die beiden Terme der Gleichung auf Gleichwertigkeit geprüft werden. Ein weiteres Näherungsverfahren stellt das grafische Lösen dar, bei dem die beiden Terme der Gleichungen als Funktionsterme aufgefasst werden und die Schnittstellen bestimmt werden (siehe hierzu auch Oleksik, 2018).

Das CAS wird insbesondere dann benötigt, wenn mit digitalen Werkzeugen auf algebraischer Ebene operiert wird. Es lassen sich gezielt Terme, sowie ganze Gleichungen manipulieren (vgl. Barzel, 2012), wodurch Gleichungen mittels CAS durch schrittweises (äquivalentes) Umformen gelöst werden können. Der Vollständigkeit wegen, sei angemerkt, dass das System per Befehl exakte Lösungen, auch in Abhängigkeit von Parametern, angeben kann. Allerdings wird dies mit Blick auf Lernende nicht unkritisch gesehen.

Warum sollten digitale Werkzeuge also im Unterricht eingesetzt werden?

Einerseits, um ein umfassenderes Begriffsverständnis zu fördern, in dem die Beziehungen von Gleichungen zum Funktionsbegriff aufgezeigt werden (vgl. Weigand, 2015). Andererseits sollen Lernende in der Lage sein, Gleichungen auf möglichst vielfältige Arten und Weisen zu lösen, um je nach Gleichungstyp entsprechende Verfahren verständlich nutzen zu können. Außerdem können Umformungen gezielt geübt werden, indem die Berechnungen an das CAS ausgelagert werden. Lernende erhalten direktes Feedback bezüglich der Auswirkung und Effizienz der Umformung (vgl. Drijvers & Barzel, 2012). Hervorzuheben gilt es, dass es nicht ausreichend ist, Gleichungen nur noch automatisiert mittels „solve“-Befehl zu lösen, da selbst ein CAS nicht immer die vollständige Lösungsmenge abbilden können. Darauf weist die Software, durch die Anmerkung, dass weitere Lösungen existieren könnten, ggf. auch explizit hin. Spätestens an dieser Stelle sollten Lernende in der Lage sein das Ergebnis, bspw. durch grafische Verfahren, zu prüfen.

## Zusammenfassung

Ziel der skizzierten Maßnahme ist es, Lehrkräfte zu befähigen digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht einzusetzen. Dazu werden didaktische Konzepte anhand von Aufgabenbeispielen thematisiert, welche die Teilnehmenden in der Praxis erproben. Um dies zu ermöglichen wird die Fortbildung in Form eines Online-Kurses angeboten. Dies bietet den Vorteil, dass sich die Lehrkräfte zeitlich flexibel mit den Inhalten auseinandersetzen und entsprechend erproben und reflektieren können. Zur Überprüfung der Wirksamkeit soll geprüft werden, ob die Konzepte verinnerlicht wurden, und ob eine Umsetzung in die Praxis stattgefunden hat.

## Literatur

- Barzel, B. (2012): *Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann?* Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.
- Bundesministerium für Bildung und Forschung (2016): *Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft*. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Frankfurt: Zarbock.
- Deutsche Telekom Stiftung (2017): *Schule digital. Der Länderindikator 2017*. Quelle, zuletzt geprüft am 29.03.2018: [https://www.telekom-stiftung.de/sites/default/files/files/media/publications/Schule\\_Digital\\_2017\\_\\_Web.pdf](https://www.telekom-stiftung.de/sites/default/files/files/media/publications/Schule_Digital_2017__Web.pdf)
- Drijvers, P. & Barzel, B. (2012): Equations with technology: Different tools, different views. In: *Mathematics Teaching* (228), S. 14-19.
- Leuders, T. (2015): Aufgaben in Forschung und Praxis. In: Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B.; Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer Spektrum, S. 435-460.
- Lipowsky, F. (2010): Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In: Müller, F. H.; Eichenberger, A.; Lüders, M.; Mayr, J. (Hrsg.): *Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 51-70.
- Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012): Lehrerinnen und Lehrer als Lernen – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen wirksamer Lehrerfortbildungen. In: Bosse, D.; Criblez, L.; Hascher, T. (Hrsg.): *Reform der Lehrerbildung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Teil 1: Analysen, Perspektiven und Forschung*. Kassel: Prolog, S. 235-253.
- Oleksik, N. (2018): CAS im Unterricht – Visualisierungen rund um Gleichungen. In: Gleich, S. (Hrsg.): *Medien im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.
- Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007): *Algebra in der Sekundarstufe*. München: Elsevier.
- Weigand, H.-G. (2015): Begriffsbildung. In Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidelberg, Berlin: Springer Spektrum. S. 255-278.