

Mathematische Strukturen in Textaufgaben und grafischen Darstellungen

Darstellungen sind wesentlich für Erkenntnisprozesse und Kommunikation in der Mathematik und im Mathematikunterricht. Dementsprechend ist in den Standards und Curricula zum Mathematikunterricht das Darstellen als ein ‚Ziel‘ schulischer Lehr-Lern-Prozesse im Sinne der Ausbildung und Förderung allgemeiner Kompetenzen formuliert und normativ gesetzt (z. B. KMK, 2005). Die Kompetenz *Darstellen* beinhaltet hierbei u. a. das Übertragen einer Darstellung in eine andere (ebd.). In der Literatur werden verschiedene Darstellungsformen unterschieden (z. B. Lesh, Post & Behr, 1987). Die verschiedenen Klassifizierungen führen im weitesten Sinn bildliche Darstellungen bzw. Texte als eine Kategorie oder Unterkategorie von Darstellungen an. Eine Übertragung von Texten in bildliche oder grafische Darstellungen ist in der Primarschule besonders im Sachrechnen von Bedeutung. Wesentlich ist hierbei, dass die Kinder die der Textaufgabe inhärente mathematische Struktur grafisch darstellen. Im Folgenden wird der Frage nachgegangen, wie Kinder mathematische Strukturen von Textaufgaben in selbstgenerierten grafischen Darstellungen abbilden.

Textaufgaben und grafische Darstellungen

Textaufgaben sind „in Textform dargestellte Aufgaben, bei denen die Sache weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist“ (Schipper, 2009, S. 242). Der Schwerpunkt liegt auf der Darstellung mathematischer Beziehungen. Sie können als deskriptionale Darstellungen bezeichnet werden (Schnotz, 2014). Gekennzeichnet sind sie u. a. dadurch, dass Strukturinformationen explizit durch Relationszeichen von außen in die Darstellung eingebaut werden. Grafische Darstellungen zeichnen sich hingegen dadurch aus, dass zweidimensionale Darstellungsmöglichkeiten, z. B. auf Papier, mit inhaltlichen Aspekten des darzustellenden Sachverhaltes in Verbindung gebracht werden. Sie zählen zu den depiktionalen Darstellungen (ebd.), die einen Sachverhalt aufgrund struktureller Gemeinsamkeiten abbilden. Sie weisen eine Ähnlichkeit zum dargestellten Sachverhalt auf.

Bezogen auf die Darstellung mathematischer Strukturen (Rinkens, 1973) heißt das Folgendes (Ott, 2016, S. 147ff): In Textaufgaben wird eine mathematische Struktur dargestellt, indem Substantive und Größen explizit durch Verben und Präpositionen miteinander verbunden werden. Die Verben und Präpositionen fungieren als Relationszeichen. Für die Darstellung mathema-

tischer Beziehungen gibt es hier durch die Grammatik klar vorgegebene Regeln. In grafischen Darstellungen hingegen wird eine mathematische Struktur dargestellt, indem Zeichen für strukturelevante Objekte erfunden und so auf dem Papier angeordnet werden, dass durch die Anordnung die mathematischen Beziehungen deutlich werden. Diese Art, mathematische Strukturen darzustellen, ist nicht eindeutig geregelt. Durch die inhaltliche und sprachliche Formulierung der Textaufgabe können die Zeichen für die strukturelevanten Objekte und deren Anordnung mehr oder weniger nahegelegt sein.

Max ist 78 cm groß.
 Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus.
 Paul ist 15 cm kleiner als Klaus.
 Wie groß ist Paul?

Abb. 1: Textaufgabe und grafische Darstellung

Abbildung 1 zeigt beispielhaft die Übertragung einer Textaufgabe in eine grafische Darstellung durch ein Kind der dritten Klasse. Die Textaufgabe legt teilweise die Zeichnung durch den Inhalt (Kindergrößen vergleichen) und die gewählten Wörter nahe. In der grafischen Darstellung sind als strukturelevante Objekte die Personen mit ihrer jeweiligen Körpergröße so angeordnet, dass die Unterschiede deutlich werden. Dies geschieht beispielweise dadurch, dass alle Personen bzw. die Kiste so auf die gleiche Höhe des Papiers gezeichnet werden, dass der Vergleich möglich wird.

Mathematische Strukturen in grafischen Darstellungen analysieren

Die Darstellung mathematischer Strukturen in von Kindern selbstgenerierten grafischen Darstellungen variiert in verschiedenen Aspekten. Als Kategorien können nicht grafische, textferne, illustrative, objektbezogene, implizit diagrammatische und explizit diagrammatische Darstellungen unterschieden werden (Ott, 2016, S. 154ff). Mathematische Strukturen (Zeichen für strukturelevante Objekte, Anordnung dieser Zeichen) sind in Kinderdokumenten der drei letztgenannten Kategorien erkennbar. Mit Hilfe eines Entscheidungsbaums kann jedes Kinderdokument eindeutig einer der Kategorien zugeordnet werden (ebd.). Kinderdokumente, die mathematische Strukturen aufweisen, unterscheiden sich zusätzlich auch bezüglich ihrer Passung zur Aufgabe und ihres Abstraktionsgrades (vgl. Ott, 2016, S. 162ff). Die grafische Darstellung aus Abbildung 1 ist ein Beispiel einer explizit diagrammatischen Darstellung, da die Zeichen für die strukturelevanten Objekte (Kindergröße) so angeordnet sind, dass der Längenvergleich sichtbar wird. Der Unterschied wird zudem hervorgehoben. Die grafische Darstellung weist

eine vollständige Passung zur Aufgabe hinsichtlich Maßzahlen, Maßeinheiten und Verknüpfungen auf. Es werden ausschließlich Zeichen für strukturrelevante Objekte verwendet. Diese werden ausgeschmückt.

Die Aufgabe *Bei einem Wettrennen braucht Tina 74 Sekunden. Lara braucht 12 Sekunden weniger als Tina. Pia braucht 84 Sekunden. Wie viele Sekunden braucht Lara? Wie viele Sekunden braucht Pia länger als Tina?* legt sprachlich oder inhaltlich kein Zeichen für strukturrelevante Objekte (Zeitdauern) und deren Anordnung (Vergleich) nahe.

Ein Beispiel einer objektbezogenen Darstellung zu dieser Aufgabe ist in Abbildung 2 zu sehen. Zeichen für die strukturrelevanten Objekte sind in den gezeichneten und mit der jeweiligen Zeit beschrifteten Mädchen zu erkennen. Die Verknüpfung, d. h. der Vergleich zwischen den Mädchen und die Differenz, sind nicht durch die Anordnung der Mädchen dargestellt. Hierfür werden Rechnungen notiert.

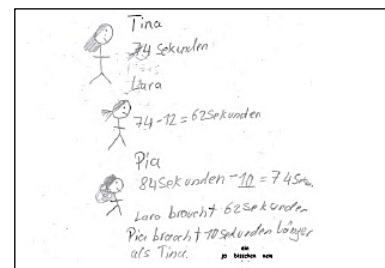


Abb. 2: Objektbezogene Darstellung

In den implizit diagrammatischen Darstellungen aus Abbildung 3a hingegen wird durch die Anordnung der strukturrelevanten Objekte der Vergleich dargestellt: Die Mädchen sind während des Rennens gezeichnet und ihre Reihenfolge zeigt den Vergleich an. Die Abstände geben nicht die Differenzen zwischen den Zeiten der Mädchen wieder.



Abb. 3: Implizit (a) und explizit (b) diagrammatische Darstellung

In der explizit diagrammatischen Darstellung aus Abbildung 3b wird ebenso wie in Abbildung 3a der Vergleich durch die Reihenfolge der rennenden Mädchen dargestellt. Die Differenz wird jedoch deutlich hervorgehoben. Als Zeichen für die Zeitdauer der Differenzen werden die einzelnen Sekunden zwischen den jeweiligen Mädchen angegeben.

In der vorliegenden Erhebung waren 23% der Kinderdokumente zur Wettrennen-Aufgabe objektbezogen, 11% implizit diagrammatisch, 3% explizit diagrammatisch. Insgesamt wurden 112 Kinder am Ende des zweiten Schuljahres aufgefordert, zu Textaufgaben eine ‚Mathezeichnung‘ anzufertigen.

Die meisten Kinder fertigten mit je 27% nicht grafische Darstellungen, d. h. nur Rechnungen oder Antwortsätze, bzw. illustrative Darstellungen an. Nach einer Intervention mit Reflexionseinheiten über ausgewählte, von den Kindern selbstgeneriert grafische Darstellungen (vgl. Ott, 2016, S. 198ff), waren in den Kinderdokumenten der Interventionsgruppe (N=35) häufiger Elemente der mathematischen Struktur grafisch dargestellt: Während die nicht grafischen Darstellungen vom Pretest zum Follow-up von 23% auf 6% und die illustrativen Darstellungen von 37% auf 11% zurückgingen, nahm der Anteil der objektbezogenen (9% auf 37%), implizit diagrammatischen (17% auf 34%) und explizit diagrammatischen Darstellungen (0% auf 11%) zu. Ähnlich Entwicklungen zeigten sich auch bei den grafischen Darstellungen zu anderen Textaufgaben. Im Vergleich zu den Kontrollgruppen war die Veränderung signifikant (Ott, 2016, S. 219ff).

Fazit

Grafische Darstellungen und Textaufgaben weisen Unterschiede hinsichtlich der Darstellung mathematischer Strukturen auf, was für viele Kinder herausfordernd ist. Das Erstellen einer grafischen Darstellung zu einer Textaufgabe ist kein einfacher Übersetzungsprozess. Es erfordert von den Kindern das Erfinden von Zeichen und die Konstruktion von Beziehungen zwischen diesen Zeichen. Diesbezüglich zeigt sich eine große Heterogenität. Es zeigt sich aber auch, dass die Kinder so im grafischen Darstellen unterstützt werden können, dass sie sich hinsichtlich der grafischen Darstellung mathematischer Strukturen verbessern und dabei die Verantwortung für ihr eigenes grafisches Darstellen im Sinne einer prozessbezogenen Kompetenz behalten bzw. übernehmen können.

Literatur

- KMK. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. München: Luchterhand.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen: Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann.
- Rinkens, H. D. (1973). *Abstraktion und Struktur*. Ratingen: Henn.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.
- Schnotz, W. (2014). Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 45-52). Münster: WTM.