Thomas Pawlaschyk, Wuppertal

Forschungsbasiertes Lernen durch Übungsaufgaben – des Kaisers neue Kleider?

Im Wintersemester 2016/17 wurden die Studierenden in der Veranstaltung Analysis 1 mit folgender Extremwertaufgabe konfrontiert:

Untersuchen Sie f(x)=|x|e^x auf Extremstellen.

Diese Aufgabe weicht von den Standardaufgaben insofern ab, dass die Betragsfunktion eine im Ursprung nicht differenzierbare Funktion erzeugt und daher das notwendige und hinreichende Kriterium dort nicht angewendet werden kann. Dennoch wurde in nahezu allen Lösungen der Studierenden diese Standardmethode angewendet. Selbst als ähnliche Aufgaben Teil der Probeklausur und der Klausur waren, zu denen es Musterlösungen gab, trat derselbe Fehler noch in der Nachklausur auf. Einzig die Tatsache, dass bei allen die Standardmethode bekannt war, ist positiv zu bewerten.

Eine erste Fehleranalyse ergab, dass die Studierenden neben fachlichen Problemen überfachliche Kompetenzen vermissen ließen. Es wurde keine Visualisierung für eine Lösungsidee herangezogen, die Verknüpfung der Begriffe Betragsfunktion und Extremstelle misslang, Standardmethoden wurden unreflektiert angewendet und die eigene Lösungsidee trotz Schwierigkeiten bei der Bildung der Ableitung nicht kritisch hinterfragt. Ferner war die Methode, Extremstellen direkt mit Hilfe der Definition, also einer Ungleichung, zu zeigen, unbekannt. Der Vergleich der Fehleranalysen der Hausaufgaben und der Klausuren ergab, dass die oben angedeuteten Kompetenzen wie Verständnis, Visualisieren, Verknüpfen, Methodenanwendung und Lösungsreflexion durch die alleinige Präsentation und das Bereitstellen der Musterlösungen nicht von allen Studierenden auf selbständige Art erworben werden konnten.

Die Frage stellt sich, wie diese Kompetenzen, die wir dem wissenschaftlichen Arbeiten und Denken zuordnen, gezielt gefördert werden können. Obwohl die Variation einer Standardaufgabe einen derartig negativen Einfluss auf die Qualität der Lösungen der Studierenden hatte, bietet sie auch die Möglichkeit, positive Effekte zu erzeugen. Genauer werden wir Standardaufgaben zu explorativen Aufgaben und zu offenen Fragen (aus Sicht der Studierenden) umformulieren, so dass einige Aspekte der Tätigkeit eines Forschenden imitiert werden. Bestenfalls beziehen sich die Aufgaben auf das Forschungsgebiet des Lehrenden oder entspringen dort. Daher ordnen wir die vorgestellte Idee dem forschungsnahem Lernen zu (Huber, 2014).

Auf dieser Grundidee entstanden Umformulierungen von Standardaufgaben in der Analysis 2 im Sommersemester 2017. Wir verzichten im Folgenden auf Details, verweisen aber auf (Pawlaschyk, Wegner, 2017) und geben die Beobachtungen sinngemäß wieder. Die Standardaufgabe lautet:

Zeigen Sie, dass f:R^2 -> R mit f(x,y)=x^3y^2/(x^2+y^2) in Null stetig ist.

Eine ähnliche Aufgabe mit derselben Arbeitsanweisung und derselben Lösungsmethode wurde zufriedenstellend gelöst. Mit derselben Methode wurde aber auch fälschlicherweise versucht, die nächste Aufgabe zu lösen.

Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht stetig ist.

Eine andere Methode war zu dem Zeitpunkt der Bearbeitung nicht bekannt, so dass auf altes Wissen zurückgegriffen wurde. Das bedeutet, dass eine Methode tatsächlich erlernt, sie aber in einem falschen, jedoch scheinbar ähnlichen Zusammenhang benutzt wurde, obwohl genau das Gegenteil zu zeigen war. Wurde die Standardaufgabe explorativ gestellt,

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

so griffen die Studierenden wieder auf bekannte Methoden zurück, ignorierten aber größtenteils den zweiten Teil der Aufgabe: die Untersuchung der Stetigkeit außerhalb des Ursprungs. So gesehen fand weder eine Reflexion noch Exploration statt, sondern wieder eine bloße Methodenanwendung. Dasselbe Resultat ergab sich, als die Aufgabe fragend formuliert wurde, wobei hier größtenteils das Aufstellen von Hypothesen gelang.

Wo ist f stetig und wo nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nach Einführung von weiteren Stetigkeitsbegriffen wurde gefragt:

Welche Stetigkeitseigenschaften hat die Funktion f? Ist sie stetig, gleichmäßig stetig oder Lipschitz-stetig?

Wieder gelangen Nachweise mit bekannten Methoden, allerdings ignorierten die meisten, dass die Begriffe durch eine Implikationskette miteinander verbunden sind und sich dadurch die Lösung vereinfachen ließ. Etwas allgemeiner war die Aufgabe:

Wie hängen die folgenden Begriffe zusammen? Stetig, partiell differenzierbar, stetig und partiell differenzierbar, total differenzierbar, stetig partiell differenzierbar.

Größtenteils wurden Sätze aus der Vorlesung benutzt, um zumindest eine Implikationsrichtung zu zeigen. Auch die entsprechenden Beispiele aus vorherigen Hausaufgaben wurden benutzt, um einige Gegenrichtungen zu widerlegen. Allerdings ignorierten es die meisten, geeignete Gegenbeispiele zu finden.

Neben den oben dargestellten explorativen und fragenden Aufgaben, wurden auch Aufgaben gestellt, die die wichtige Forschungstätigkeit des Abstrahierens und Verallgemeinerns simulieren. Die folgende Aufgabe wurde vergleichsweise gut gelöst, da sich beide Beweise sehr ähneln.

**Aus der Analysis 1 wissen wir, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar ist. Verallgemeinern Sie den Satz für stetige Funktionen auf kompakten Quadern.*

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Standardaufgaben nach Umformulierung zu explorativen und fragenden Aufgaben an Schwierigkeitsgrad zunehmen, da die Arbeitsanweisungen nicht mehr klar erscheinen, nach mehr Aspekten gefragt wird, für die die Studierenden noch nicht sensibilisiert wurden, und mehr Lösungsmethoden gefordert werden, die von den Studierenden gegebenenfalls noch nicht erlernt wurden. Findet aber eine entsprechende Vorbereitung statt, sinkt der Schwierigkeitsgrad wieder und Kapazitäten werden frei, weitere Aspekte zu beachten und sich weitere Kompetenzen anzueignen. Das deckt sich auch mit einer Befragung der Studierenden, die die offenen Fragen als schwierig und gar lästig empfanden, am Ende der Veranstaltung jedoch einen höheren Lernfortschritt im Hinblick auf Verständnis wahrgenommen haben. Die Wirkung der Aufgaben auf die überfachlichen Kompetenzen kann erst im Sommersemester 2018 in der Veranstaltung Funktionentheorie untersucht werden.

Aus den obigen Beobachtungen lassen sich Empfehlungen für zukünftige Veranstaltungen ableiten. Die Aufgaben sollten nicht nur aus fachlicher Sicht zusammenhängen, sondern auch aus überfachlicher Sicht, wenn neue Kompetenzen zur Erarbeitung einer Lösung verlangt werden. Die Vorbereitung, etwa in Form eines Tutoriums, sollte sich daher nicht auf das Fachliche beschränken, sondern auch Lerntechniken schulen und forschungsnahes Lernen unterstützen. Findet eine Vorbereitung nicht statt und wird von den Studierenden erwartet, sich die Methoden und Kompetenzen eigenständig anzueignen, sollten sie beratend unterstützt werden. Es sollte ein einfacher Einstieg in die Veranstaltung ermöglicht werden, in der Woche für Woche je nach Leistung die Unterstützungsmaßnahmen reduziert werden und Methodentraining, Visualisierungsaufgaben, explorative und fragende Aufgaben, Verallgemeinerungen bis hin zu Problemen mit Forschungsbezug eingesetzt werden. Dabei sollte stets sichergestellt werden, dass die erforderlichen Lösungsmethoden zur Verfügung stehen oder in realistischer Zeit erworben werden können. Hierzu ist ein Gesamtkonzept für die Veranstaltung wenn nicht sogar hinaus notwendig. Ebenfalls ist eine hochschuldidaktische Schulung der Lehrenden empfehlenswert.

Mehr Aufgabentypen können erdacht und eingebunden werden, um das forschnungsnahe Lernen zu fördern:

Beweisen Sie, dass jede lokal konvexe Funktion stetig ist. Falls Sie keine Lösung finden, recherchieren Sie in der Literatur und geben Sie den Beweis samt Quellenangabe an.

Nehmen Sie die Rolle eines Lehrenden ein und erklären Sie Ihren KommilitonInnen, was komplexe Zahlen und deren Eigenschaften sind.

Finden Sie ein Gegenbeispiel für eine Funktion, die nur im Ursprung und nirgends sonst stetig ist.

Weshalb benötigen die Funktionen in den Sätzen, die mit Differenzierbarkeit zu tun haben, stets einen offenen Definitionsbereich?

Zu beachten ist, dass gerade die letzten beiden Aufgabenstellungen und die obige Verallgemeinerungsaufgabe* in einem anderen Kontext bereits in (Bourbaki, 1958, 1961, 1970) zu finden sind. Daher sind die Aufgabenstellungen an sich nicht neu, wohl aber der Versuch einer systematischen Einbindung von forschungsnaher Lehre, deren Untersuchung und Wirkungsanalyse in den Veranstaltungen der Reinen Mathematik an der Universität Wuppertal. Das Ziel ist es, der Antwort zur Frage in (Schlicht, Slepcevic-Zach, 2016) näherzukommen, wie "Research-Based Learning auf die Bearbeitung von Problemstellungen der Grundlagenforschung übertragen werden" kann.

Literatur

Bourbaki, N. (1958). Eléments de mathématique. 23. Première partie: Les structures fondamentales de l’analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre 8: Modules et anneaux semi-simples, A*ctualités Sci. Ind. no. 1261*, Hermann, Paris.

Bourbaki, N. (1961). Eléments de mathématique. Première partie. (Fascicule II.) Livre III: Topologie générale. Chapitre 1: Structures topologiques. Chapitre. 2: Structures uniformes, Troisième édition entièrement refondue, *Actualités Sci. Indust.*, No. 1142. Hermann, Paris.

Bourbaki, N. (1970). Eléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris.

Huber, L. (2014). Forschungsbasiertes, Forschungsorientiertes, Forschendes Lernen: Alles dasselbe? Ein Plädoyer für eine Verständigung über Begriffe und Entscheidungen im Feld forschungsnahen Lehrens und Lernens, *Das Hochschulwesen 62*, no. 1+2, 32–39.

Pawlaschyk, T., Wegner, S.-A. (2017). Research-based learning techniques in mathematics – The emperor's new clothes? *https://arxiv.org/abs/1707.09851*.

Schlicht, J., Slepcevic-Zach, P. (2016). Research-based learning and service learning: Two versions of problem based learning (in german), *Zeitschrift für Hochschulentwicklung 11*, no. 3, 85–105.