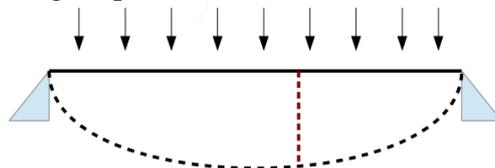


Die Numerische Mathematik im Kontext von Schule und Bildung

1. Was ist Numerik?

Um diese Frage zu beantworten, wird exemplarisch eine typische Fragestellung der Numerischen Mathematik dargestellt. Zentrale Aspekte der Numerik (vgl. Pfahl 1990) werden zudem angeführt.

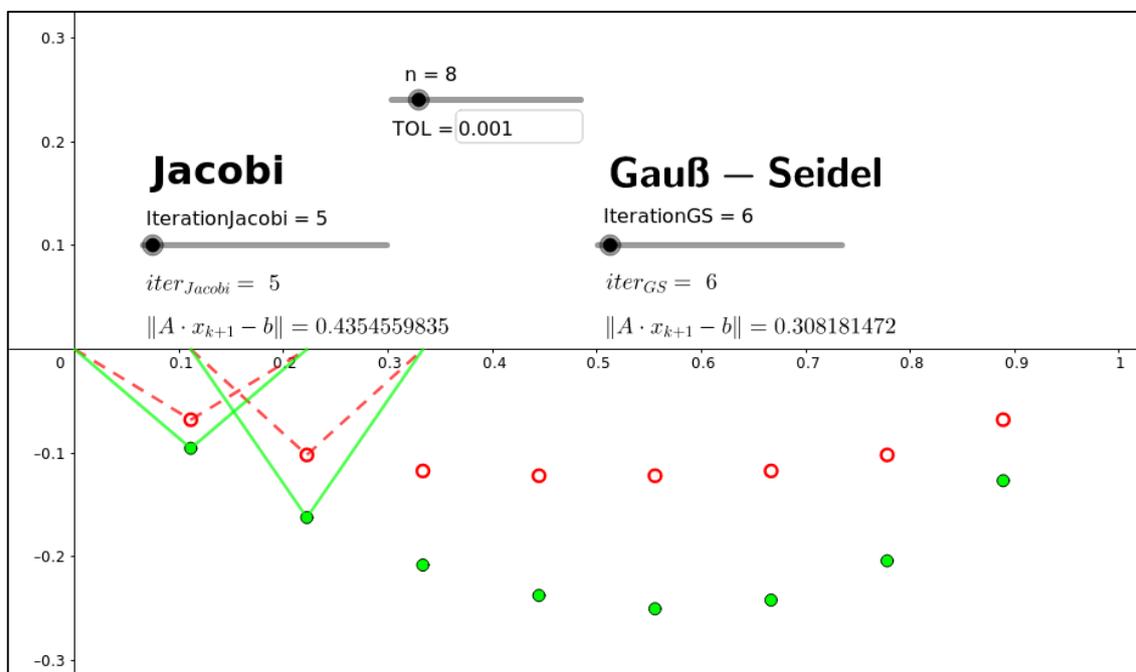
Auf ein an den Enden aufliegendes Material wirkt von oben gleichmäßig eine Kraft, sodass sich das Material nach unten durchbiegt. Eine konkrete Anwendung (*Anwendungsaspekt*) ist dabei die Verformung einer Brücke.



Physikalisch lässt sich das Problem durch das Prinzip der minimalen potentiellen Energie beschreiben: Ein Körper verformt sich so, dass seine potentielle Energie minimiert wird. Dieses Problem ist äquivalent zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form $-u'' = f$ für eine zweimal differenzierbare Funktion $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Für die meisten Differentialgleichungen ist keine analytische Lösung bekannt. Es wird daher eine abgeschwächte Form der Fragestellung, die sogenannte schwache Formulierung oder Variationsformulierung (*Näherungsaspekt*) betrachtet. Die schwache Formulierung kann nun z.B. mit der Methode der Finiten Elemente diskretisiert werden (*Diskretisierungsaspekt*). Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Der Vektor x beschreibt dabei die Verformung des Materials in den jeweiligen Stützstellen.

Das lineare Gleichungssystem kann dabei in Abhängigkeit von der Güte der Diskretisierung, d.h. der Anzahl der Stützstellen, sehr groß (>100.000 Unbekannte) werden. Für die Lösung werden daher in der Praxis häufig iterative Verfahren (*Algorithmusaspekt, Dynamischer Aspekt*) genutzt (vgl. Meister 2015). Einfache Beispiele für derartige Verfahren sind das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren. Die Numerische Mathematik befasst sich nun mit der Konstruktion (*Konstruktiver Aspekt*) und Analyse (*Theorieaspekt*) geeigneter Verfahren zur Lösung eines solchen linearen Gleichungssystems. Typische und mögliche Fragestellungen sind dabei: 1) Wie viele Iterationen sind für eine vorgegebene Genauigkeit erforderlich? 2) Wie verhält sich die Anzahl der Iterationen mit einer feineren Diskretisierung? 3) Wie lange benötigen die Verfahren bzw. wie praktikabel sind sie?

Im Kontext des Mathematikunterrichts können dazu erste Experimente (vgl. Milicic 2016) auch mit schulnaher Software durchgeführt werden (siehe folgende Abbildung, erstellt mit GeoGebra).



In diesem Sinn werden wesentliche Aspekte der Numerischen Mathematik auch für Schülerinnen und Schüler zugänglich.

2. Die Numerische Mathematik in der Schule

Festzulegende Unterrichtsinhalte müssen in jedem Fall einen Beitrag zu allgemeinen Zielsetzungen des Unterrichts leisten. Als anerkannte Lernziele für den Mathematikunterricht können beispielsweise jene von Heinrich Winter (vgl. Winter 1975; Hischer 2003) angeführt werden: 1) Entwicklung von Handlungs- und Denkstrategien, heuristischen Strategien, 2) Förderung der Bereitschaft zum Argumentieren, Kritisieren, Beurteilen, Üben im Axiomatisieren, Begründen, Beweisen, 3) Üben im Mathematisieren, Ausbildung der Sicht auf Mathematik als Mittel zur Alltagsbewältigung, zur Herstellung abstrakter Modelle für reale Probleme, 4) Übersetzen zwischen verschiedenen Sprachebenen, Erlernen des Formalisierens, präformalen, algorithmischen und kalkülhaften Arbeitens. Die Numerik stellt in Bezug auf die genannten Lernziele insbesondere eine bedeutende Sichtweise dar (vgl. 1. Was ist Numerik?), außermathematische Probleme im Rahmen der mathematischen sowie informatischen Modellbildung mit Hilfe von Algorithmen zu bearbeiten (vgl. Lernziele 3 und 4). Unter Berücksichtigung der vorgestellten Aspekte der Numerik (vgl. Pfahl 1990) kann der Beitrag der Numerik zu den genannten allgemeinen Zielsetzungen noch präzisiert werden (Tabelle 1).

Tabelle 1: Gegenüberstellung der allgemeinen Lernziele und der Aspekte der Numerik (vgl. Pfahl 1990)

	1	2	3	4
<i>Kalkülaspekt</i>			✓	✓
<i>Algorithmischer Aspekt</i>			✓	✓
<i>Dynamischer Aspekt</i>	✓	✓	✓	
<i>Konstruktiver Aspekt</i>	✓		✓	
<i>Diskretisierungsaspekt</i>		✓	✓	✓
<i>Näherungsaspekt</i>	✓	✓	✓	✓
<i>Gebrauchsaspekt</i>			✓	✓
<i>Anwendungsaspekt</i>	✓		✓	✓
<i>Theorieaspekt</i>	✓	✓	✓	

Mit den Aspekten der Numerischen Mathematik können die Winterschen Lernziele erfüllt werden. Folglich könnte – Formulierung im Konjunktiv, da aktuell kein wesentlicher Bezug zur Numerik in den Lehrplänen Allgemeinbildender Höheren Schulen in Österreich festgestellt werden kann (vgl. Plangg 2017) – die Numerik auch im Kontext von Schule und Bildung einen wesentlichen Beitrag leisten.

Letztlich haben die Winterschen Lernziele die Funktion, mögliche Antworten auf die Fragen „Was soll, wie gelernt werden?“ einzugrenzen (Winter 1975). Die Frage, die es in diesem Kontext zu beantworten gilt lautet folglich: „Soll in der Schule Numerik gelernt werden?“. Die Bedeutung dieser Frage tritt insbesondere dann hervor, wenn man sich vor Augen führt, dass die genannten Lernziele möglicherweise auch mit Hilfe von anderen Gebieten der Mathematik erfüllt werden können. Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage liegt – die unserer Ansicht nach jedenfalls mit einem Ja zu beantworten ist – in der Forderung, der Mathematikunterricht habe ein gültiges Bild der Mathematik zu geben (vgl. Vollrath 1968; Tietze et al. 1982). Lernziele können, so Winter (1975), „nicht ohne ein Bild von Mathematik und auch nicht ohne ein Bild vom Menschen bestimmt werden“. Aufgrund der heute großen Bedeutung der Numerischen Mathematik für die Wissenschaft und die Gesellschaft gehört zu einem stimmigen Bild von Mathematik auch die Numerik (Henn 2004). Damit wird aus der Forderung einer Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik mehr als lediglich ein didaktisches Paradigma (Hischer 2003). Nachdem zentrale Mathematisierungsmuster wie Funktionen, Differentialgleichungen, lineare Gleichungssysteme

u. v. m. häufig numerische Verfahren erfordern (vgl. Tietze et al. 1982) und Mathematik – im Sinne einer Technologie – als unentbehrliches Werkzeug in verschiedenen Bereichen der Gesellschaft eingesetzt wird (Hischer 2003), müssen somit auch numerische Verfahren als unverzichtbarer Bestandteil des Bildungsauftrags erachtet werden. Nach Hischer (2003, S. 225) ist es in dieser Hinsicht die Aufgabe des Mathematikunterrichts fundamentale Ideen und typische Methoden der Mathematik, die zum Verständnis und zur Modellierung der Welt, in der wir leben, den Lernenden näher zu bringen (vgl. auch Heymann 1996). Folglich kann für den Mathematikunterricht auch im Sinne der Allgemeinbildung das Erfahrbarmachen der Anwendung und des Gebrauchs von Numerischer Mathematik gefordert werden.

Notwendig erscheint in dieser Hinsicht jedenfalls auch für eine entsprechende Professionalisierung der Mathematiklehrkräfte Sorge zu tragen. Für eine mögliche Umsetzung von Inhalten aus der Numerik ist insbesondere ein Wissen im Umgang Algorithmen und damit in Verbindung stehende Fragen wie auch mit leistungsfähigen technologischen Hilfsmitteln unabdingbar.

Literatur

- Henn, Hans-Wolfgang (2004): Computer-Algebra-Systeme – junger Wein oder neue Schläuche? In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 25 (3), S. 198–220.
- Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Basel: Beltz.
- Hischer, Horst (2003): Mathematikunterricht und neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. 2. Aufl. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- Klafki, Wolfgang (2007): Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik. 6., neu ausgestattete Aufl. Weinheim [u.a.]: Beltz (Beltz-Bibliothek).
- Meister, Andreas (2015): Numerik linearer Gleichungssysteme. Eine Einführung in moderne Verfahren. Mit MATLAB®-Implementierungen von C. Vömel. 5. Aufl. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Milicic, Gregor (2016): Iterative Löser für lineare Gleichungssysteme. In: *Mathematik im Unterricht* (7), S. 13-20.
- Pfahl, Martin (1990): Numerische Mathematik in der gymnasialen Oberstufe. Mannheim, Wien: BI-Wiss.-Verl. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik).
- Plangg, Simon (2017): Mathematikunterricht im Wandel. Eine fachdidaktische Analyse. Dissertation. Universität Salzburg, Salzburg.
- Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans (1982): Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Vollrath, Hans-Joachim (1968): Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem. In: *Neue Sammlung* 8, S. 108–112.
- Winter, Heinrich (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 7, S. 106–116.