Julia REY & Michael MEYER, Köln

Naturwissenschaftliche Vorgehensweisen im Mathematikunterricht – Ein Wechselspiel von Entdeckungen und Begründungen

1. Einleitung

In der didaktischen Forschung wird das Experiment verschiedentlich für das Lernen von Mathematik diskutiert (u.a. Philipp 2013). Im vorliegenden Beitrag werden zur Weiterführung dieser Diskussion Ausprägungen naturwissenschaftlicher Vorgehensweisen differenziert, deren Potentiale anschließend angedeutet werden. Hierzu zählt insbesondere die Thematisierung des komplexen Zusammenhangs zwischen Entdeckungs- und Begründungsprozessen während des Experimentierens mit Hilfe der Begriffe *quasi-euklidisch* und *quasi-empirisch*.

2. Begriffe aus den Naturwissenschaften

Um Ausprägungen naturwissenschaftlichen Vorgehens unterscheiden zu können, werden die Naturwissenschaften und ihre Didaktiken herangezogen. An einer Beispielfrage aus der Chemie sollen die Unterscheidungen thematisiert werden.

In der Abbildung ist ein verkalkter Wasserkocher zu sehen. Eine alltagsnahe Frage, die man sich diesbezüglich stellen kann, wäre:

Was passiert mit Kalk im Wasserkocher, wenn Säure hinzugegeben wird?

Mit Schwarz (2009, S. 18) kann man ein „Experiment“ allgemein als ein kontrolliertes und wiederholbares Untersuchen von Zusammenhängen verstehen. Dieses Untersuchen ist zum einen explorativ (im Sinne eines „explorativen Experiments“ nach Steinle 2004) möglich, indem Bedingungen variiert werden, um danach eine Hypothese für die Beantwortung der Fragestellung zu generieren. Auf das Beispiel des Wasserkochers bezogen könnte dies bedeuten, die Person hätte keine (klare) Vorstellung davon, was mit dem Kalk passiert, wenn Säure hinzugegeben wird. Ihr Experiment würde demnach erst mit mindestens einer Säure durchgeführt werden. Die dann zu beobachtenden Phänomene könnten zur Generierung einer Hypothese führen.

Zum anderen ist das Experimentieren auch möglich, indem Erkenntnisse aus dem Fach die Hypothese festlegen, die es dann empirisch zu überprüfen gilt (Schwarz 2009, 17 f.). Auf das Wasserkocherbeispiel bezogen könnten mögliche erste Erkenntnisse sein, dass Kalk (fachlich: Calziumcarbonat) das Salz einer schwachen Säure ist, nämlich Kohlensäure. In Verbindung mit einer stärkeren Säure (z. B. Essigsäure) könnte es wieder zu Kohlensäure reagieren, d. h. es würde unter anderem ein Gas beobachtbar sein, nämlich CO_2. Diese mögliche – aus Erkenntnissen des Faches generierte – Hypothese wird dann an der konkreten Situation „Kalk im Wasserkocher“ überprüft.

Das Untersuchen des Zusammenhanges wiederholt sich im experimentellen Prozess so lange, bis sich die Ergebnisse stabilisieren. Damit ist die Fragestellung zum Wasserkocher vorläufig hinreichend erarbeitet und weitere Parameter müssen nicht mehr untersucht werden. Die Untersuchung mitsamt den Ergebnissen können dann für Unterrichtszwecke eingesetzt werden. Die unterrichtlichen Vorgaben dienen dann allein dazu, die vom Lehrer erwünschten Ergebnisse zu erhalten. Scharfenberg (2005, S. 13) bezeichnet dieses Vorgehen „ein Unterrichtsexperiment“. Bei einem Unterrichtsexperiment sind also Rahmenbedingungen vorgegeben, damit sich verlässliche Ergebnisse zu einem fachlich gegebenen Zusammenhang zeigen, der für die Lernenden in der konkreten Situation nicht notwendig bekannt sein muss:

Überprüfe: Wenn Säure (pH-Wert<7) zum Kalk hinzugegeben wird, dann bildet sich CO_2, H_2O und das Salz der Säure.

3. Naturwissenschaftliches Vorgehen in der Mathematik(didaktik)

An einer Frage aus der Geometrie sollen die verschiedenen Ausprägungen des Experiments für die Mathematik nachfolgend betrachtet werden:

Was passiert mit der Fläche einer Figur, wenn ich sie um einen beliebigen Faktor x zentrisch strecke?

Diese Fragestellung beantworteten u. a. Lehramtsstudentinnen. Die Studentin Paula begann ihre Bearbeitung wie folgt (alle Transkripte geglättet): „Okay. Ich könnte jetzt verschiedene Figuren einfach mal nehmen *(zeichnet ein Dreieck).* Ein Dreieck. Muss, muss das schön sein?“

Nachfolgend streckt sie dieses Dreieck, berechnet die Flächen des Ausgangsdreiecks sowie des vergrößerten und variiert anschließend die Eckenanzahlen der Figur, um eine Hypothese zur Beantwortung der Fragestellung zu generieren. Sie geht folglich explorativ vor.

Anders erarbeitet die Studentin Maria die Fragestellung: „Ehm also man vergrößert ja, man hat ja einen Faktor. Also man rechnet ja quasi – wenn man hier *(zeichnet zwei Dreiecke)* wenn man hier eine Strecke hat, a und c, dann ist diese Strecke ja a mal x. Die hier ist denke ich b mal x und das ist c mal x *(beschriftet die entsprechenden Seiten des größeren Dreiecks).* […] Die Frage ist halt ob er [der Flächeninhalt] sich dann auch einfach verxfacht.“

Anstatt das skizzierte Dreieck manuell zu strecken, nutzt die Studentin ihre mathematischen Erkenntnisse, nämlich die „Verxfachung“ der Seiten der Figur nach der Streckung und generiert die Hypothese, dass sich auch die gestreckte Fläche im Vergleich zur Ursprungsfläche „verxfachen“ könnte. Diese Hypothese wird von ihr anschließend überprüft und falsifiziert. Ihr Vorgehen entspricht dem der experimentellen Methode. Die mathematische Fragestellung könnte als Unterrichtsexperiment wie folgt gestaltet sein:

> Wenn eine Figur um den Faktor x zentrisch gestreckt wird, so kann die Fläche der gestreckten Figur wie folgt ausgedrückt werden:
>
> $FA_{neu} = FA_{alt} \cdot x^2$. Überprüfe.

Mit einer solchen Aufforderung würde ein (fachlich) vorgegebener Zusammenhang überprüft werden. Dies muss natürlich nicht immer derart explizit geschehen. Im Gegensatz zur experimentellen Methode geht es also nicht um ein Generieren einer Hypothese, sondern nahezu ausschließlich um deren Prüfung, insofern der Zusammenhang durch den Aufbau bzw. die Anordnung im Experiment schon vorgegeben oder zumindest nahegelegt wird.

4. Euklidische und Empirische Tätigkeit beim Experimentieren

Lakatos (1982, S. 27 f.) unterscheidet die Begriffe „euklidisch“ von „quasi-empirisch“, um damit wissenschaftliche Systeme zu klassifizieren. *Euklidisch* ist demnach ein System dann, wenn bei Axiomen begonnen wird. Anhand deduktiver Folgerungen werden daraus Konsequenzen gezogen, die wahr sind, solange die Axiome als initiale Prämissen dieser Schlüsse wahr sind. Aus ökonomischen und pragmatischen Gründen werden Beweise in der Realität allerdings nicht vollständig zurückgegangen, was dies zu einer sozialen Tätigkeit macht. Ein Beispiel: In der Studie von Inglis u.a. (2013, S. 274) wurde der nebenstehende Beweis Mathematikern vorgelegt, die entscheiden sollten, ob sie ihn als gültig bewerten oder nicht. Betrachten wir die Grenzwertbildung in Zeile sechs des Beweises: Für diese Aussage werden keine Regeln angebracht, es erfolgt keine Rückführung auf Axiome. Entsprechend wird darauf vertraut, dass dieser Schritt richtig sei. Dieses Einbringen von *als gültig gesetzten* Regeln, die nicht weiter erläutert werden, wird von der Autorin des Artikels als *quasi-euklidisch* bezeichnet.

> **Theorem**
>
> $$\int x^{-1}dx \overset{\S}{=} \ln(x) + c$$
>
> **Proof**
>
> We know that $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$ for $k \neq -1$.
> Rearranging the constant of integration gives $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}-1}{k+1} + c'$ for $k \neq -1$.
> Set $y = \frac{x^{k+1}-1}{k+1}$, and take the limit as $k \to 1$ as follows.
> Let $m = k + 1$, and rearrange $y = \frac{x^{k+1}-1}{k+1}$ to give $x^m = 1 + ym$ or $x = (1+ym)^{\frac{1}{m}}$.
> Set $n = \frac{1}{m}$.Then $x = (1+ym)^{\frac{1}{m}} = \left(1+\frac{y}{n}\right)^n \to e^y$ as $n \to \infty$, by properties of e.
> As $n \to \infty$ we have $m \to 0$, so $k \to -1$.
> In other words, $x \to e^y$ as $k \to -1$, so $y \to \ln(x)$ as $k \to -1$.
> So $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}-1}{k+1} + c' = y + c' \to \ln(x) + c'$ as $k \to -1$. So $\int x^{-1}dx = \ln(x) + c'$.

Neben dem Euklidischen beschreibt Lakatos (1982, S. 27 f.) das *Quasi-empirische Vorgehen*, in dem die „Übertragung der Falschheit“ von unten nach oben, von falschen Konsequenzen auf die Hypothese, verläuft. Eine Hypothese gilt als sich bewährend, solange keine Konsequenzen gefolgert werden können, die sich nicht bewahrheiten.

Die Begrifflichkeiten *quasi-empirisch* und *quasi-euklidisch* helfen nun das experimentelle Vorgehen der Studentin Maria näher zu analysieren. Sie beginnt mit einer für sie scheinbar gültigen Regel, nämlich der Verxfachung der Seitenlängen. Diese Regel benötigt für sie anscheinend keine Überprüfung. Die Studentin geht demnach *quasi-euklidisch* vor; allerdings nicht um einen vollständigen Beweis zu liefern, sondern um eine Hypothese (Verxfachung der Fläche) zu generieren. Diese Hypothese wird von ihr anschließend *quasi-empirisch* überprüft. Die Begrifflichkeiten *quasi-empirisch* und *quasi-euklidisch* helfen zu unterscheiden, was das Fragliche in der Bearbeitung sein kann und zeigen somit, was also noch experimentell zu untersuchen ist: Fraglich ist für Maria nicht die Verxfachung der Seitenlängen, sondern die Verxfachung der Fläche. Es eröffnet sich damit ein komplexer Zusammenhang zwischen dem Begründen – im Sinne des Herleitens – und dem Entdecken – dem Aufstellen einer Hypothese.

5. Ausblick

Die obigen Betrachtungen zeigen, wie komplex der Zusammenhang zwischen Entdeckungs-, Begründungs- und Prüfprozessen beim experimentellen Arbeiten sein kann. Die Unterscheidung *quasi-euklidisch* und *quasi-empirisch* ermöglicht, eine differenzierte Analyse zu treffen und zeigt zugleich die Nähe zwischen dem naturwissenschaftlichen Vorgehen und einem mathematischen. Die unterschiedlichen Realisierungen des Begründens im Rahmen der naturwissenschaftlichen Vorgehensweisen werden im weiteren Forschungsprozess inferentiell betrachtet.

Literatur

Lakatos, I. (1982). Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie (H. Vetter, Übers.). Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. (Originalwerk veröffentlicht 1978)

Philipp, K. (2013). Experimentelles Denken. Wiesbaden: Springer.

Scharfenberg, F.-J. (2005). Experimenteller Biologieunterricht zu Aspekten der Gentechnik im Lernort Labor. Dissertation, Universität Bayreuth. Abgerufen von http://www.pflanzenphysiologie.uni-bayreuth.de/didaktik-bio/en/pub/html/31120diss_Scharfenberg.pdf (08.04.2018)

Schwarz, O. (2009). Die Theorie des Experiments. Geographie und Schule, 180, 15-21.

Steinle, F. (2004). Exploratives Experimentieren: Charles Dufay und die Entdeckung der zwei Elektrizitäten. Physik Journal, 6, 47-52.