

Klaus RÖDLER, Frankfurt a.M.

## **Rechnen-durch-Handeln: Stellenwertverständnis im inklusiven Unterricht aufbauen**

Mangelndes Stellenwertverständnis ist ein Kernproblem rechenschwacher Schüler. Dies zeigt sich im verfestigten zählenden Rechnen (LORENZ 1998) ebenso wie in der fehlenden Kompetenz zu ableitendem Denken. (GAIDOSCHIK et al. 2017) „*Warum bleiben Kinder in der Sackgasse des zählenden Rechnens hängen?*“, fragen WEISSHAUPT & PEUCKER (2009, S. 72) und diagnostizieren vor allem mangelhafte Zahlkonzepte: „*Übereinstimmend mit Gerster/Schultz (2000), Fritz/Ricken (2008) und Gaidoschik (2003) werden vor allem Schwierigkeiten in der Entwicklung des Anzahlverständnisses und des Teile-Ganzes-Verständnisses als Gründe für das Verharren in ineffektiven, fehlerhaften Strategien betrachtet.*“ (eb-da.) GERSTER & SCHULZ (2004, S. 80-99) weisen darauf hin, dass es vielen Kindern schwer fällt, das Konzept vom reversiblen Zehner aufzubauen.

Rechnen-durch-Handeln (RÖDLER 2006, 2012, 2016a, b) ist ein aus der Praxis entstandenes und in der Praxis weiter entwickeltes didaktisches Konzept, das für diesen Problembereich neue Wege aufzeigt. Grundidee dieses Konzepts ist es, durch einen Blick in die Kulturgeschichte der Zahl sowohl die besonderen Erkenntnishürden herauszufiltern, die es für die Lernenden zu nehmen gilt, wie auch zugleich Mittel zu gewinnen, welche den Kindern den Zugang zur Welt der Zahlen und des Rechnens (RÖDLER 1998) erleichtern.

### **1. Ein kulturgeschichtlicher Blick auf den Stellenwert**

Die ersten Zahlen waren konkrete Zahlen (IFRAH 1987, S. 27 ff.) Von der Entwicklung dieser ersten Zahlen und Zahlworte bis hin zu unserem Stellenwertsystem hat es rund 15.000 Jahre gedauert. *Reihung und Bündelung* (MENNINGER 1979, I S.49-66) bildeten sich als Konzepte heraus und erlaubten es, den Zahlenraum immer neu zu erweitern. Diese Idee wurde in Zahlzeichen übersetzt, welche die als Bündelungen gefassten Bausteine der Zahl unterscheidbar aufreichten. Von den Zahlen der Sumerer und Ägypter bis zu den ‚römischen‘ Zahlen des Mittelalters wurden Anzahlen auf diese Weise aus unterschiedlichen Wertebenen zusammengesetzt sichtbar gemacht.

Rechnen war ein Hantieren mit den in den Zeichen abgebildeten Wertebenen. Die Operationen wurden mit Zählgegenständen, am Rechenbrett oder am Stellenwertrahmen konkret durchgeführt. Die Tatsache, dass es die

zweite Hälfte des Mittelalters brauchte, bis sich die Stellenwertzahlen und die darauf gründenden schriftlichen Rechenverfahren in Europa durchgesetzt hatten und dass sich dieses handelnde Rechnen in Asien und Osteuropa dennoch bis ins 20. Jahrhundert hinein erhielt, belegt, dass der Schritt zum Rechnen mit Stellenwertzahlen ein großer ist und dass die fundierenden Zahlvorstellungen ausgereift sein müssen, um diesen zu machen.

Ganz ähnlich zu Norbert Elias *soziogenetischem Grundgesetz* (ELIAS 1976, S. LXXIV) geht Rechnen-durch-Handeln davon aus, dass heutige Lernende die Grundideen dieser Kulturgeschichte in sich nacherlebend aufbauen müssen. Rechnen-durch-Handeln versucht, dies durch exemplarische Erfahrungen an Rechenhandlungen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau zu ermöglichen. (Zum Begriff des Exemplarischen, vergl. WAGENSCHNIG 1970, S. 11 ff.)

## **2. Didaktische Konsequenz: Zahlen und Rechengänge auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau zur Kenntnis nehmen**

Zahlen können offensichtlich auf unterschiedlichen Abstraktionsstufen existieren. Der Grad der Verschlüsselung des kardinalen Hintergrundes kann variieren. Analysiert man die historischen Zahlzeichen und Rechenhandlungen, so lassen sich folgende Abstraktionsstufen identifizieren: *analoge Abbildung, konkrete Bündelung, symbolische Bündelung, konkretes Stellenwertsystem, abstraktes Stellenwertsystem*. (vergl. Rödler 2006, 2011, 2016a) Diese Unterscheidung erlaubt es, verschiedene Rechenhandlungen entsprechend dieser Stufung zu unterscheiden und didaktisch einzuordnen.

Der bekannte didaktische Aufbau *enaktiv-ikonisch-symbolisch* greift zu kurz, denn er unterscheidet nicht, auf welcher Abstraktionsstufe sich eine Handlung vollzieht und die Übersetzung bis hin ins Symbolische geleistet wird. In der Praxis zeigt sich z.B., dass es Sinn gibt, das Abstraktionsniveau immer dann auf die Stufe *analoge Abbildung* abzusenken, wenn neue Zahlräume oder neue operative Strukturen erschlossen werden, weil diese Stufe die strukturellen Besonderheiten unmittelbar sichtbar macht. Andererseits hilft z.B. die Steigerung auf die Stufe *konkrete Bündelung*, um beim Berechnen von Zehnerübergängen ein Denken in Schritten zu motivieren, während Rechenhandlungen auf der Stufe *symbolische Bündelung* es erlauben, auch Operationen mit sehr großen Zahlen durchzuführen und die schriftlichen Rechenverfahren als verschriftete Handlungen zu verstehen.

### **3. Dadurch mögliche Neuerung: Geänderte Operationsfolge**

Wenn man Materialhandlungen nicht als Veranschaulichung eigentlich rein mentaler Vorstellungen ansieht, sondern umgedreht diese dem Denken zugrundeliegende Rechnen begreift, von dem sich die Lernenden Vorstellungen erwerben und an dem sie Einsichten in die verschiedenen Zahlaspekte gewinnen, so zeigt sich, dass die vier Grundrechenarten als analoge Handlung schon von Vorschulkindern verständlich ausgeführt werden können. Dies erlaubt es, mit Multiplikation und Division ins Rechnen einzusteigen, was vor allem zwei Vorteile hat: Erstens wirkt dieser Einstieg inklusiv, da alle Kinder gleichermaßen auf Rechenhandlungen angewiesen sind. Damit wird der Einstieg ins Rechnen zum *gemeinsamen Gegenstand* (FEUSER 2013) Zweitens zeigen diese Operationen Zahlen als wahrnehmbare, wiederkehrende Bausteine. Sie entstehen nicht mehr nur aus Zählprozessen, sondern zeigen sich als die Wahrnehmung erfassbare Ganzheiten. (RÖDLER 2016a, S. 73-74. vergl. GERSTER & SCHULZ 2004, S. 68-79) Dieser Blick auf die Zahl wird unterstützt, wenn man die Subtraktion vor der Addition behandelt, weil bei dieser der Zerlegungsaspekt bedeutungsvoll wird und die Addition nachfolgend als Zusammensetzung der zuvor zerlegten Bausteine erscheint. (Vergl. RÖDLER 2016a, S.109-110 und 2016b) Das unterstützt die Entwicklung des Teile-Ganzes-Konzept.

Auch beim Zehnerübergang lohnt es sich, mit der Subtraktion einzusteigen und die Addition nachfolgend zu behandeln. Zumindest dann, wenn man Zehnerstangen verwendet und den zweiten Schritt als *virtuelles Entbündeln* vollzieht. (RÖDLER 2016a, S. 140 ff. und 2016 b) Die Zehnerstange verhindert, dass die Grenze gedanklich ignoriert und zählend überwunden wird.

### **4. Notationen als verschriftlichte Rechenhandlungen**

Wenn man das handelnde Lösen eines Rechenproblems mit Hilfe eines Rechenmittels als den Kern des Rechnens versteht, so erlaubt es die sichtbare Handlung, diesen Rechenprozess zu beschreiben. Diese Beschreibungen des Geschehens lassen sich auf unterschiedliche Weise schriftlich festhalten. Je nachdem, wie genau der Vorgang durchgeführt und analysiert wird, entstehen unterschiedliche Formen der Verschriftlichung. (Vergl. RÖDLER 2016a, S. 141 ff., 156 ff.) So gewonnene Notationen sind keine zu lernenden Verfahren, sondern stützen das Kopfrechnen im Sinne von RADATZ & SCHIPPER (1999, Bd.2, 42 ff. und Bd.3 S. 82 ff.) Das Kind kann sie verständlich gebrauchen, weil es in ihnen die zuvor gebrauchte persönliche Materialhandlung wiedererkennt.

## Literatur

- Elias, N. (1976) *Über den Prozess der Zivilisation, Bd. 1*. Frankfurt: Suhrkamp
- Feuser, G. (2013) Kooperation am gemeinsamen Gegenstand. In: Feuser, G. & Kutscher, J. (Hrsg.) *Enzyklopädisches Lexikon der Behindertenpädagogik*, Bd. 7 (S. 282-293) Stuttgart: Kohlhammer
- Gaidoschik, M. et al. (2017) Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik* 1/2017, S. 93-124
- Gerster, H.-D. & Schulz, R. (2004) *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Download PH Freiburg
- Ibrah, G. (1986) *Universalgeschichte der Zahlen*. Frankfurt: Campus
- Lorenz, J. H. (1998) *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im MU*. Göttingen, Hogrefe
- Menninger, K. (1979) *Zahlwort und Ziffer*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht
- Radatz, H. /Schipper, W. et al. (1999) *Handbuch für den Mathematikunterricht Bd.1-4*. Hannover: Schroedel
- Rödler, K. (1998) Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen – Eine sozialkundliche Einführung in mathematisches Denken. *Grundschule* 5, S. 45-48
- Rödler, K. (2006) *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln*. Seelze: Kallmeyer
- Rödler, K. (2010) Dysklakulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten., *Sache-Wort-Zahl* 114, S. 44-48
- Rödler, K. (2011) Zahlen und Rechengvorgänge auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus. In: M. Helmerich & K. Lengnink et al. (Hrsg.) *Mathematik verstehen*.(S. 131-145) Wiesbaden: Vieweg+Teubner
- Rödler, K. (2012) Frühe Alternativen zum Zählen. *Sache-Wort-Zahl* 129, S. 9-15
- Rödler, K. (2016a) *Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./2. Klasse*. Hamburg: AOL
- Rödler, K. (2016b) Ein Mathematikunterricht für alle! – 10 Bausteine für einen inklusiven MU. *behindertemenschen* 4/5, S. 37-46
- Rödler, K. (2016c) *Mathe inklusiv: Materialband 5 ‚Mathematische Projekte‘*, Hamburg: AOL
- Von Aster, M. & Lorenz J. H. (Hrsg.) (2005) *Rechenstörungen bei Kindern*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht
- Wagenschein, M. (1970) *Verstehen lehren*. Weinheim: Julius Beltz
- Weißhaupt, S. & Peucker, S. (2009) Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In: Fritz, A. et al. (Hrsg.) *Handbuch Rechenschwäche*. S. 52-76. Weinheim: Beltz