Tobias ROLFES, Landau, Boris GIRNAT, Hildesheim,
Christian FAHSE, Landau & Alexander ROBITZSCH, Kiel

Schülerkompetenzen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Sekundarstufe

In den Anfängen des Stochastikunterrichts dominierte der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace die Unterrichtspraxis. Dieses Vorgehen erfuhr allerdings Kritik, da den Lernenden die vielfältige Anwendung von Wahrscheinlichkeit in unterschiedlichen Bereichen verborgen blieb (Batanero, Chernoff, Engel, Lee & Sánchez, 2016). Daher wird heutzutage in vielen Curricula und Standards der Sekundarstufe (z. B. Common Core State Standards Initiative, 2010; Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz, 2007) eine experimentelle Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff als Grenzwert von relativen Häufigkeiten gefordert. Bisher empirisch kaum untersucht ist jedoch, in welcher Weise Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe in der Lage sind, adäquate Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace und zum frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu gewinnen. Daher ist das Ziel der vorgestellten Studie, in einer empirischen Untersuchung die Kompetenzen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Sekundarstufe zu erfassen. Dabei wurden gleichermaßen Items zum klassischen wie auch zum frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff eingesetzt.

Methode

Stichprobe. An der Erhebung nahmen 102 Schülerinnen und Schüler aus vier Lerngruppen (Klasse 8, 9, 10 und Leistungskurs 12) aus unterschiedlichen Gymnasien in Rheinland-Pfalz teil. Es wurden insgesamt 56 Items in einem Multi-Matrix-Design administriert. Aus Platzgründen werden in dem vorliegenden Beitrag nur die Ergebnisse des Items M144 berichtet, das 51 Testpersonen vorgelegt wurde.

Erhebungsinstrument. Item M144 (Abb. 1) wurde in der Weise entwickelt, dass für die Lösung der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace mit dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff konkurriert. Im Itemstamm wird erwähnt, dass eine Person einen *normalen* Spielwürfel kauft. Durch die Verwendung des Adjektivs *normal* soll verdeutlicht werden, dass es keine Indizien dafür gibt, dass es sich *nicht* um einen Laplace-Würfel handelt. Außerdem ist eine Tabelle mit den Häufigkeiten je Augenzahl nach einem Versuch mit 50 Würfen angegeben. Die auftretenden Häufigkeiten liegen - unter der Annahme, dass alle Augenzahlen gleichwahrscheinlich sind - innerhalb eines 95-prozentigen Konfidenzintervalls, da für eine Binomialverteilung

$B(n, p, k)$ gilt: $\sum_{k=4}^{12} B\left(50, \frac{1}{6}, k\right) = 0{,}914$. Aus inferenzstatistischer Perspektive gibt die Häufigkeitsverteilung daher keinen Anlass, die Nullhypothese „Der Würfel ist ein Laplace-Würfel“ zu verwerfen. Selbstredend kann von den Testpersonen nicht erwartet werden, die exakte Breite des Konfidenzintervalls zu bestimmen. Allerdings wurde vorausgesetzt, dass zu einem elaborierten Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach Laplace das Wissen gehört, dass die real auftretenden Häufigkeiten einer Variabilität unterliegen und eine gewisse Abweichung vom Erwartungswert bei einer wiederholten Durchführung des Zufallsexperimentes normal ist.

Um den frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff anwenden zu können, muss die Information, dass es sich um einen normalen Spielwürfel handeln soll, ignoriert werden. Dann kann die Häufigkeitsverteilung analysiert und eine relative Häufigkeit von $\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ nach dem Gesetz der großen Zahlen als Prognosewert für die Wahrscheinlichkeit einer Sechs bestimmt werden.

Auswertungsmethode. Zur Auswertung wurde eine qualitative Analyse der Item-Antworten durchgeführt.

Spielwürfel

Lea kauft in einem Spielwarengeschäft einen normalen Spielwürfel. Zuhause wirft sie diesen Spielwürfel 50 Mal.

Lea schreibt auf, wie häufig die Augenzahlen fallen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	4	12	10	11	5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Würfel eine 6 fällt?

Wenn es ein Würfel ist, der auf allen Seiten gleich schwer ist, dann $\frac{1}{6}$.

Abb. 1: Item, in dem der Laplace-Ansatz und der frequentistische Ansatz konkurrieren, mit einer Schülerantwort (Klasse 8, 13 Jahre).

Ergebnisse

Die Antworten zeigten, dass sowohl der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace als auch der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff von den Schülerinnen und Schülern angewendet wurden. So antworteten 13 Testpersonen basierend auf den Laplace-Ansatz mit $\frac{1}{6}$ oder $16{,}\overline{6}\%$; 21 Testpersonen gaben als Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{50}$, $\frac{1}{10}$, 10% oder vergleichbare Angaben an. Die verbleibenden 17 Testpersonen gaben keine oder andere Antworten.

Die meisten Testpersonen gaben nur einzelne Zahlen als Lösung an. Vereinzelt war erkennbar, dass ein Abwägen zwischen dem Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace und dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff stattfand. Bei der Schülerantwort aus Abb. 1 hält es der Schüler für erwähnenswert, dass die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenzahlen nur gilt, wenn der Würfel auf allen Seiten gleich schwer ist. Zwar ist in der Antwort nicht direkt erkennbar, dass ein frequentistischer Ansatz in Erwägung gezogen wurde, aber die Ergänzung könnte darauf hinweisen, dass die Häufigkeitstabelle zumindest Irritationen bei der Anwendung des Laplace-Ansatzes verursacht hat. Somit könnte der Schüler sich zu der Ergänzung veranlasst gesehen haben, dass $\frac{1}{6}$ natürlich nur gilt, wenn es sich um einen nicht gezinkten Würfel handelt.

Ein Schüler (14 Jahre) aus der Klassenstufe 9 gab als Lösung an:

„$\frac{1}{6}$, weil die 50 Mal nur ein kleiner Ausschnitt sind und es immer genau gleich wahrscheinlich ist, eine 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu würfeln.“

Der Schüler stellte fest, dass die Anzahl der Durchführungen mit 50 zu gering ist, um aus der Häufigkeitstabelle Indizien abzuleiten, dass es sich beim Würfel nicht um eine Gleichverteilung handelt.

Eine Schülerin (18 Jahre) aus dem Leistungskurs in Jahrgangsstufe 12 antwortete:

„$\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$ (zu wenig Angaben (Werte?))“

Zwar verwendet sie den frequentistischen Ansatz, verdeutlicht aber durch einen Zusatz in Klammern ihre Zweifel, ob die Anzahl der Durchführungen ausreicht. Diese Aussage könnte darauf hindeuten, dass der Schülerin bewusst ist, dass beim frequentistischen Ansatz die Verlässlichkeit des Schätzwertes für die Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Anzahl der Durchführung steigt.

Ein Schüler (17 Jahre, LK12) formulierte als Antwort:

„$\frac{5}{50} = \frac{1}{10}$, normalerweise $\frac{1}{6}$ “.

Auch dieser Schüler verwendete den frequentistischen Ansatz, erkannte jedoch, dass seine Antwort im Widerspruch zu einer Antwort, die auf dem Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace basiert, steht. In welcher Weise das Adverb *normalerweise* hier zu interpretieren ist, ist unklar. Es könnte gemeint sein, dass normalerweise die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei einem Würfel $\frac{1}{6}$ beträgt. Dass ihm trotzdem $\frac{1}{10}$ als die näherliegende Lösung für diese Aufgabe erschien, deutet darauf hin, dass weder der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace noch der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff ausreichend konzeptuell durchdrungen wurden.

Diskussion

Die Schülerantworten zeigen, dass sowohl der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace als auch der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff bei diesem Item angewendet wurden. Bei nur wenigen Schülerinnen und Schüler war in den Antworten identifizierbar, dass erkannt wurde, dass beide Ansätze in diesem Item konkurrieren. Einschränkend muss allerdings erwähnt werden, dass das Testformat keine Begründung der Antwort erforderte und daher nur in Ansätzen erkennbar ist, welcher Denkprozess bei den Schülerinnen und Schüler stattfand.

Im Schulunterricht werden zumeist Aufgaben verwendet, bei denen entweder der Laplace-Ansatz oder der frequentistische Ansatz adressiert wird. Aufgaben, bei denen die Lernenden abwägen müssen, welcher der beiden Ansätze im vorgegebenen Kontext angemessener ist, werden selten thematisiert. Wie die vorliegenden Schülerantworten aus unterschiedlichen Jahrgangsstufen zeigen, bieten gerade solche Aufgaben das Potenzial, ein vertiefteres Verständnis der beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe zu erlangen. Hierbei könnte der Begriff der *Information* ein „unified approach" (Chernoff & Sriraman, 2014, S. xvii) für die Integration der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe sein: „For what a probability does is assigning a number to the aggregate of the currently available information" (Devlin, 2014, S. xiv).

Literatur

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability* (ICME 13 Topical Surveys). Cham, Schweiz: Springer.

Chernoff, E. J. & Sriraman, B. (2014). Introduction to probabilistic thinking: Presenting plural perspectives. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives (S. xv–xvii). Dordrecht, Niederlande: Springer.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council Chief State School Officers.

Devlin, K. (2014). The most common misconception about probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (S. ix–xiv). Dordrecht, Niederlande: Springer.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz. (2007). *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 - 9/10)*. Mainz: Autor.