Marcel SACKARENDT, Paderborn

Zur Verwendung der lokalen linearen Approximationseigenschaft der Ableitung in ökonomischen Anwendungskontexten anhand ausgewählter Schulbuchbeispiele

In den Wirtschaftswissenschaften wird der Wert der Ableitung standardmäßig als Näherungswert für die durch die nächste Einheit auftretende Funktionswertänderung verwendet (vgl. etwa Feudel 2015; Tietze 2013, S. 316 f.). Dabei wird oft übergangen, dass es sich um einen approximativen Ansatz handelt. So resümiert Feudel (2015) nach an einer Analyse ausgewählter Fachbücher im Hinblick auf den Grenzkostenbegriff, dass es häufig zu einer „Vermischung von Ableitung und absoluter Änderung“ komme. Ein Beispiel wird zeigen, dass solch eine „Vermischung“ auch in Mathematik-Schulbüchern für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen zu finden ist. Wie aber könnte in diesem Zusammenhang ein reflektierter Umgang mit der Ableitung im Analysisunterricht am Berufskolleg aussehen? Im Rahmen einer Sachanalyse werden diesbezüglich grundlegende Überlegungen angestellt.

„Vermischung“ von lokaler Änderungsrate und absoluter Änderung

Folgendes Schulbuchbeispiel von Schöwe & Knapp (2014, S. 222 f.) richtet sich primär an Lernende, die im Bereich Wirtschaft und Verwaltung am Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen die Fachhochschulreife anstreben. Hierbei entstehen zwei Gärtnereien Kosten für die Herstellung von Blumensamen, die durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ modelliert werden. Wie in der Ökonomie üblich, wird die unabhängige Größe in Mengeneinheiten (kurz ME) und die abhängige Größe in Geldeinheiten (kurz GE) gemessen, wobei eine ME 2000 g Blumensamen und eine GE 100 Euro entspricht. Während eine Gärtnerei im vergangenen Jahr 2 ME produzierte, waren es bei der anderen 5 ME. Vor dem Hintergrund geringfügiger Produktionssteigerungen gilt es nun, die Kostensituationen der beiden Gärtnereien zu analysieren.

Die intendierte Lösung ist ebenfalls abgedruckt. Hier kommt es zur „Vermischung“ von lokaler Änderungsrate und absoluter Änderung:

> $K'(x)$ ist uns auch als lokale Änderungsrate bekannt. Sie misst den Kostenzuwachs, der bei einer Produktion einer Mehreinheit entsteht. Den Kostenzuwachs nennt man Grenzkosten. Daher heißt die Ableitungsfunktion K' Grenzkostenfunktion.

Daraufhin werden die Werte $K'(2) = 3$ [GE/ME] und $K'(5) = 30$ [GE/ME] berechnet und es wird abschließend gefolgert, dass die Kostensituation bei 5 ME angespannter sei als bei 2 ME.

Validierung des approximativen Ansatzes durch Fehlerrechnung

Im Beispiel werden Ableitung und absoluter Kostenzuwachs gleichgesetzt, wie Feudel (2015) es mitunter auch in der Fachliteratur gefunden hat. Wird der Wert der Ableitung hingegen als Näherung für den Kostenzuwachs aufgefasst, liegt es nahe, eine Aussage hinsichtlich der Güte der Approximation zu treffen. Hierfür werden üblicherweise der absolute und prozentuale Fehler berechnet (vgl. Schuppar & Humenberger 2015, S. 104 f.). In diesem Fall offenbart eine Fehlerrechnung (Tabelle 1), dass der Kostenzuwachs um 25 Prozent unterschätzt wird. Der Wert der Ableitung ist also keine gute Näherung für den Kostenzuwachs, der bei Produktion einer Mehreinheit entsteht.

x_0	$K'(x_0)$	$K(x_0+1)-K(x_0)$	*Absoluter* Fehler	***Prozentualer* Fehler**
2 ME	3 GE/ME	4 GE	-1 GE	-25 %
5 ME	30 GE/ME	40 GE	-10 GE	-25 %

Tabelle 1: Validierung des approximativen Ansatzes durch Fehlerrechnung

Verkleinerung der ME zur Verbesserung der Approximation

Inwiefern kann die Verwendung der Ableitung als Näherungswert für die durch die nächste Einheit auftretende Funktionswertänderung überhaupt gerechtfertigt werden? Bezogen auf Kostenfunktionen kann die für $h \approx 0$ aus der Analysis bekannte Approximation $K(x_0+h)-K(x_0) \approx K'(x_0) \cdot h$ als Argumentationsbasis dienen, die sich aus der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt. Der Wert der Ableitung ist häufig eine gute Näherung für den durch eine Mehreinheit entstehenden Kostenzuwachs, da $h = 1$ im Kontext oftmals klein ist (vgl. Feudel 2015).

Im Schulbuchbeispiel ergibt sich allerdings das Problem, dass eine ME nicht klein genug für eine gute Näherung ist. Jedoch erscheint die Wahl der ME relativ willkürlich. Verbessert sich die Approximation bei hinreichender Verkleinerung der ME? Wird eine ME z. B. so gewählt, dass sie 100 g statt 2000 g entspricht, so wurden bisher 40 ME bzw. 100 ME produziert, die Kosten werden durch eine Kostenfunktion C mit $C(x) = K\left(\frac{x}{20}\right)$ beschrieben und eine Fehlerrechnung liefert die in Tabelle 2 aufgeführten Werte.

$\hat{x}$	$C'(\hat{x})$	$C(\hat{x}+1)-C(\hat{x})$	*Absoluter* Fehler	***Prozentualer* Fehler**
40 ME	0,15 GE/ME	0,150125 GE	-0,000125 GE	-0,08 %
100 ME	1,5 GE/ME	1,522625 GE	-0,022625 GE	-1,49 %

Tabelle 2: Fehlerrechnung nach Verkleinerung der ME

Der prozentuale Fehler hat sich durch die Verkleinerung der ME deutlich verbessert. Ist das immer so? Folgender Satz bestätigt, dass es sich um ein systematisches Phänomen handelt.

Satz. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $f: (a; b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an einer Stelle $x_0 \in (a; b)$ mit $f'(x_0) \neq 0$ differenzierbar ist.

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass die Funktion

$$\varphi: (na; nb) \to \mathbb{R}, \varphi(x) := f\left(\frac{x}{n}\right)$$

an der Stelle $\hat{x} := nx_0$ differenzierbar ist,

der prozentuale Fehler $r(\hat{x}) := \frac{\varphi'(\hat{x}) - (\varphi(\hat{x}+1) - \varphi(\hat{x}))}{\varphi(\hat{x}+1) - \varphi(\hat{x})}$ definiert ist

und $|r(\hat{x})| < \varepsilon$ gilt.

Die Beweisidee zur betragsmäßigen Reduzierung des prozentualen Fehlers $r(\hat{x})$ ist in Abbildung 1 skizziert. Im Kern wird der prozentuale Fehler auf die ursprüngliche Funktion f zurückgeführt und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{f'(x_0)}{n} - \left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right)}{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)} = f'(x_0) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)}\right) - 1 = \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} - 1 = 0.$$

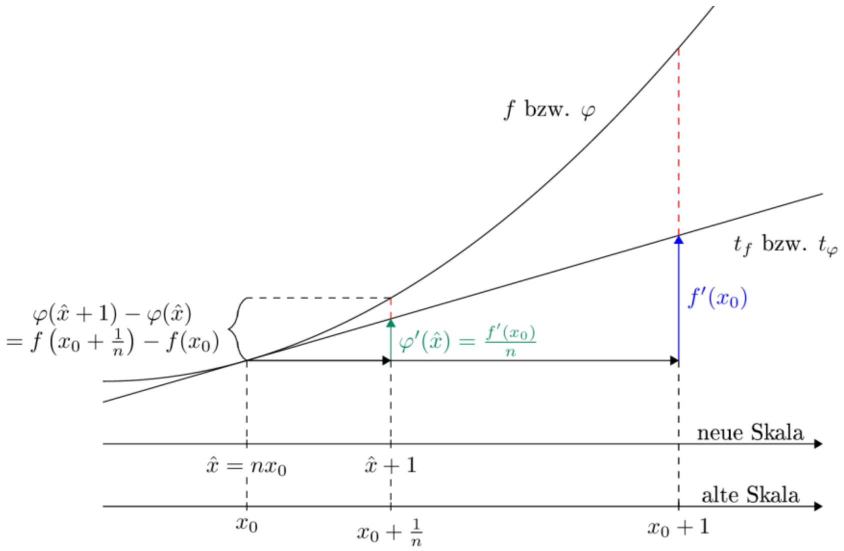

Abb. 1: Beweisskizze nach Visualisierungsideen von Reiß (2007, S. 196) und Tietze (2013, S. 316)

Die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ deutet jedoch Grenzen des prozentualen Fehlers an. Im Fall $f'(x_0) = 0$ kann es sogar sein, dass er nicht definiert ist. Wenn er definiert ist, liegt er im Betrag bei 100 Prozent und ist ungeeignet, um die Güte der Approximation zu beurteilen. Es kann aber ein durchschnittlicher Fehler (oben z. B. Fehler pro g) berechnet werden und mit der lokalen linearen Approximationseigenschaft (siehe z. B. Greefrath et al. 2016, S. 144 f.) lässt sich zeigen, dass auch dieser bei hinreichender Verkleinerung der Einheit betragsmäßig klein ist. Im Vortrag wurde dies anhand eines weiteren Beispiels illustriert, worauf hier aus Platzgründen verzichtet wird.

Fazit und Ausblick

Wird die approximative Verwendung der Ableitung in ökonomischen Kontexten im Schulunterricht aufgegriffen, so sollte im Sinne eines reflektierten Umgangs mit diesem Grundbegriff aufgrund der *lokalen* Approximationseigenschaft berücksichtigt werden, dass die Einheit der unabhängigen Größe wesentlichen Einfluss auf die Güte der Approximation haben kann. In der Fachliteratur wird gelegentlich auf die Wahl der Einheit eingegangen und von einer *marginalen Einheit* gesprochen (vgl. Feudel 2017, 2018). Daher wird folgende Formulierung favorisiert: Der Wert der Ableitung ist eine gute Näherung für die durch die nächste Einheit auftretende Funktionswertänderung, wenn eine Einheit der unabhängigen Größe *marginal* gewählt ist.

Wie aber kann die Rolle der Einheit verständnisorientiert am Berufskolleg thematisiert werden? Ein Ansatz besteht darin, das Verhalten des prozentualen Fehlers bei „Marginalisierung" der Einheit exemplarisch und unter Einbezug unterschiedlicher Darstellungsformen zu untersuchen. Dafür gilt es auch zu klären, welche Grundvorstellungen und Zugänge zur Ableitung (siehe z. B. Greefrath et al. 2016) im Vorfeld besonders nützlich sind.

Literatur

Feudel, F. (2015). Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. In F. Calouri, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1049-1052). Münster: WTM-Verlag.

Feudel, F. (2017). Students' interpretation of the derivative in an economic context. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2049-2056). Dublin, Irland: DCU Institute of Education and ERME.

Feudel, F. (2018, im Druck). Verständnis der Ableitung im Kontext der Grenzkosten in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin: Springer Spektrum.

Reiß, W. (2007). *Mikroökonomische Theorie: Historisch fundierte Einführung* (6., vollständig überarbeitete und verbesserte Auflage). München: Oldenbourg.

Schöwe, R. & Knapp, J. (2014). *Mathematik: Wirtschaft und Verwaltung – Fachhochschulreife NRW* (1. Auflage, 3. Druck). Berlin: Cornelsen.

Schuppar, B. & Humenberger, H. (2015). *Elementare Numerik für die Sekundarstufe*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin: Springer Spektrum.

Tietze, J. (2013). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik: Das praxisnahe Lehrbuch – inklusive Brückenkurs für Einsteiger* (17., erweiterte Auflage). Wiesbaden: Springer Fachmedien.