Tilman SAUER, Mainz

Warum die Kettenlinie keine Parabel ist

1. Einführung

Die Kettenlinie, d.i. die Form einer hängenden schweren Kette, ist eine transzendentale Kurve in dem von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) eingeführten Sinn. Die Bestimmung ihrer mathematischen Form ist ein berühmtes Problem, das 1690 von Jakob Bernoulli (1654-1705) gestellt wurde und ein Jahr später von Leibniz, Christiaan Huygens (1629-1695) sowie Jakobs Bruder Johann Bernoulli (1667-1748) gelöst wurde. Aufgabenstellung und die drei unterschiedlichen Lösungen wurden in den *Acta Eruditorum* publiziert. Leibnizens und Bernoullis Lösung sollten die Leistungsfähigkeit des neuen Kalküls der Differential- und Integralrechnung demonstrieren, aber auch Huygens lieferte eine Lösung ohne Verwendung des neuen Kalküls.

Es handelt sich um ein Problem, das gut geeignet ist, die Historizität des mathematischen Denkens in der Mathematiklehrerausbildung zu demonstrieren. Die Lösung des Problems in der heutigen Form, d.h. die funktionale Form der Kettenlinie als $y(x) = a \cosh(x/a)$, war in dieser Form weder von Huygens, noch von Bernoulli oder Leibniz so gegeben. Es handelt sich vielmehr um eine materiell repräsentierte Kurve, welche die enge Verbindung zwischen Physik und Geometrie in der Frühzeit der Entwicklung der Analysis gut demonstriert.

Wenn wir heute danach fragen, was für eine Art Kurve die Kettenlinie ist, und darauf antworten, dass sie der Funktionsgraph des hyperbolischen Kosinus ist, so ist dies also weder die Frage, welche vor 1690 gestellt wurde, noch ist die heutige Antwort, diejenige, welche 1691 gegeben wurde.

Historisch erwuchs das Interesse an der Form der hängenden Kette vielmehr aus ihrer Brauchbarkeit als materielles Mittel, um parabolische Kurven zu erzeugen. Die Frage, die sich vor 1691 also stellte, war: repräsentiert die hängende Kette eine Parabel, oder erlaubt sie uns wenigstens, eine Parabel zu erzeugen?

2. Die hängende Kette als Erkenntnismittel bei Galilei

Bei Galilei jedenfalls finden wir das Interesse an der hängenden Kette als einem Mittel, um Repräsentationen parabolischer Trajektorien zu erzeugen. Das Problem der hängenden Kette wird in seinen *Discorsi* mehrmals diskutiert. Am zweiten Tag der *Discorsi* erläutert Salviati eine Art „Parabeln zu beschreiben“:

„An einer Wand befestigt man in gleicher Höhe über dem Horizonte zwei Nägel, [...] von beiden Nägeln hängt eine feine Kette herab, [...] Diese Kette hat die Gestalt einer Parabel, so dass, wenn man dieselbe durch Punktirung abmalt, man eine richtige Parabel erhält.“ (Galilei 1973, S 123)

An einer späteren Stelle der Discorsi, nämlich am vierten Tag, äußert sich Salviati allerdings etwas zurückhaltender, was die Genauigkeit der Repräsentation einer Parabel angeht:

„wir empfinden Staunen und Freude, wenn das stark oder schwach gespannte Seil sich der parabolischen Form nähert und die Ähnlichkeit so groß ist, dass, wenn Ihr auf einer Ebene eine Parabel zeichnet und sie dann umgekehrt betrachtet, d.h. mit dem Gipfel nach unten, die Basis parallel dem Horizonte, und wenn Ihr eine kleine Kette mit ihren Enden an diese Basis der Parabel anlegt, dass alsdann die Kette mehr oder weniger sich krümmen und der genannten Parabel sich anschließen wird; und zwar ist der Anschluss umso genauer, je weniger die Parabel gekrümmt, d.h. je mehr sie gestreckt ist, so dass in Parabeln von 45° Neigung die Kette fast ganz genau jene deckt.“ (Galilei 1973, S. 256)

Es existiert ein umfangreiches Manuskriptbündel Galileis, das sogenannte Ms72, in dem sich Seiten finden, aus denen klar hervorgeht, dass Galilei die Unterschiede zwischen einer Parabel und der Kettenlinie genau untersucht hat (Galilei, no date, folios 42r, 43r, 107rv, 113r, 132rv). Eine genauere Analyse der Blätter hat zudem ergeben, dass Galilei mit einem mechanischen Modell, die Form der Kette auf die Parabelform hin untersuchte (Renn et al. 2002). Allerdings scheinen diese Versuche kein definitives Ergebnis für Galilei ergeben zu haben, wohl weil die sich ergebende Gleichung vom vierten Grade ist und das Problem für Galilei unlösbar blieb.

Es gibt Hinweise, dass Galilei beabsichtigte, seinen *Discorsi* einen fünften Tag hinzuzufügen, an dem vor allem das Problem der hängenden Kette diskutiert werden sollte. Dazu kam es aber nicht mehr. Die *Discorsi* erschienen 1638 und Galilei starb 1641.

3. Der junge Christiaan Huygens über die Kettenlinie

Nur wenige Jahre nach Galileis Tod beschäftigte sich der erst 17-jährige Christiaan Huygens mit dem Problem der Form der hängenden Kette (Huygens 1888, Bukoski 2008). Anders als Galilei setzte Huygens sich das Ziel, geometrisch zu beweisen, dass eine Kettenlinie niemals exakt eine Parabel darstellen könne. Hierzu wurde er angeregt durch Korrespondenz mit Marin Mersenne (1588-1648) aber wahrscheinlich auch durch eine Bemerkung Albert Gerards (1595-1632), des Herausgebers der posthum publizierten mathematischen Werke Simon Stevins (1548-1620). Gerard hatte in einer Anmerkung zu Stevins Text behauptet, dass die hängende Kette eine Parabel darstelle und er dies auch beweisen könne.

Ähnlich wie Galilei versucht auch Huygens, das Problem zunächst auf einen dynamischen Kern zu reduzieren, indem er einen Faden mit in regelmäßigen Abständen angebrachten Gewichten betrachtet. Anders aber als Galilei betrachtet Huygens nicht den Fall dreier Gewichte zwischen zwei festgehaltenen Endpunkten, sondern nur zwei. Diese etwas einfachere Situation erlaubt es ihm, ein geometrisches Theorem über den Gleichgewichtszustand dieser zwei frei hängenden Gewichte herzuleiten.

Das Theorem besagt, dass die gradlinige Verlängerung der beiden äußeren Verbindungsstücke sich in einem Schnittpunkt trifft, der auf einer Vertikalen, die durch den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden freien Massen geht, liegt.

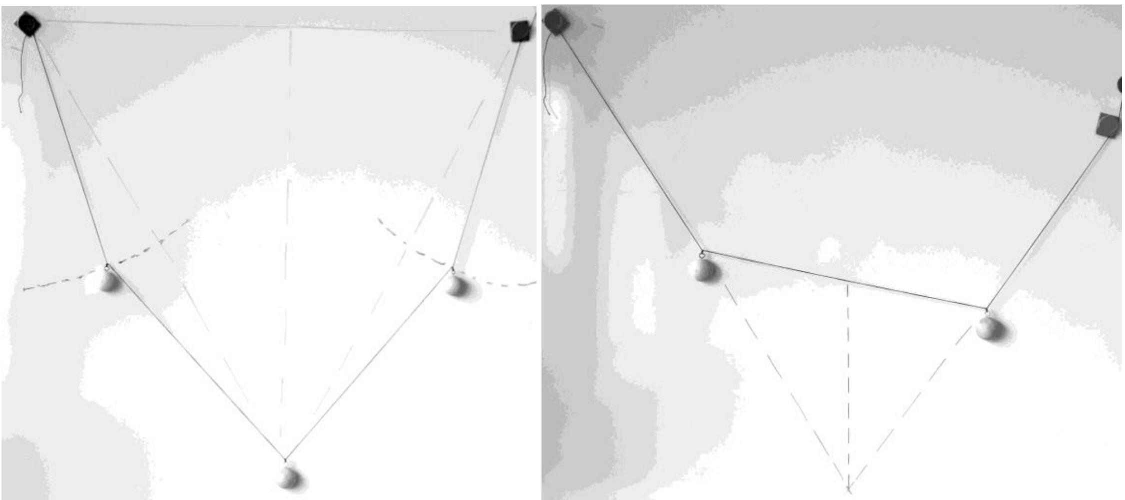

Abb. 1: Bestimmung des dynamischen Gleichgewichts für einen elementaren Ausschnitt der Kette. Galilei (links) versuchte sich zu überlegen, wie weit zwei zusätzliche Gewichte links und rechts von einem mittleren Gewicht den Faden nach außen ziehen und somit das mittlere Gewicht anheben würden, bis der gemeinsame Schwerpunkt am niedrigsten sei. Das Problem führt auf eine Gleichung vierten Grades und war für Galilei nicht lösbar. Huygens (rechts) bewies geometrisch, dass die Gleichgewichtskonfiguration für zwei Gewichte darin besteht, dass die geradlinigen Verlängerungen der äußeren Verbindungslinien sich auf einer Vertikalen, die durch den gemeinsamen Schwerpunkt der beiden mittleren benachbarten Massen geht, treffen.

Dieses Theorem des „hängenden Durchmessers der Schwere“ erlaubt es Huygens nun, geometrisch zu beweisen, dass die Kette keine Parabel darstellen kann. Dieser Beweis erfolgt indirekt, indem Huygens annimmt, dass von einer hängenden Kette drei angrenzende Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, und dann mittels seines Theorems sowie der Verwendung archimedischer Dreiecke in der Parabel zeigt, dass die sich anschließenden Knoten nicht auf der Parabellinie liegen können.

4. Abschließende Bemerkungen

Die Frühgeschichte der Untersuchung der Kettenlinie zeigt, dass die Frage bei Galilei und Huygens noch nicht darin bestand herauszufinden, welche Kurve die Kettenlinie darstellt. Vielmehr war das Verständnis von Kurven noch wesentlich durch die antike Kegelschnittlehre des Apollonius geprägt, und die Frage war daher die, ob bzw. wie genau die Kettenlinie eine Parabel darstellt.

Galilei wusste zwar, dass die Kettenlinie eine Parabel nur approximiert, er empfahl sie aber dennoch weiterhin als materielles Mittel zur tatsächlichen Erzeugung von Parabeln, welches angemessen sei, solange die Kette bzw. Parabel nicht zu tief hinge. Huygens dagegen bewies rigoros, d.h. mit geometrischen Mitteln, dass die hängende Kette prinzipiell keine Parabel darstellen kann. Aber anstatt zu fragen, welche Linie die Kette denn tatsächlich darstellte, zeigte der junge Huygens, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Kette eine Parabel darstellt. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn statt der direkten Abstände zwischen den Knotenpunkten die horizontalen Projektionen der Kettenverbindungen äquidistant sind.

Eine Verschiebung der Fragestellung dahin, dass die Natur der Kettenlinie selbst zum Gegenstand wird, fand erst mehrere Jahrzehnte später statt, als das Problem mit Mitteln der neuen Analysis erneut betrachtet wurde. Und zwar lautete die Antwort zunächst tautologisch dahingehend, dass die Form der Kettenlinie die Kettenlinie war. Aber die Aufstellung ihrer charakteristischen Differentialgleichung erlaubte es Leibniz und Bernoulli nun, die exakten Eigenschaften dieser transzendenten Kurve zu berechnen.

Literatur

Bukoski, J. (2008). Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain. *The College Mathematical Journal* 39, 2-11.

Galilei, G. (1973). *Unterredungen und Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Galilei, G. (no date). *Galileo Galilei's Notes on Motion. Ms. Gal. 72. Folios 33 to 196*. Biblioteca Nazionale Centrale, Florence, Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florence, Max Planck Institute for the History of Science (eds.). Online edition unter www.imss.fi.it/ms72, Ver. 2.1. 1999, accessed April 2018.

Huygens, Christiaan (1888). *Œuvres Complètes*. Tome Premier. *Correspondance 1638-1656*. Le Have: Martinus Nijhoff.

Renn, J., Damerow, P., Rieger, S. (2002). Hunting the White Elephant: When and How Did Galileo Discover the Law of Free Fall? In J. Renn (Ed.), *Galileo in Context* (pp. 29-149). Cambridge: Cambridge University Press.

Sauer, T. Historical Remarks on the Problem of the Catenary. In preparation.