Marc SAUERWEIN, Bonn

Sprechen über Figurierte Zahlen – Punktmuster, Zahlenfolgen und Terme zugleich

Figurierte Zahlen sind ein klassisches stoffdidaktisches Thema, mit denen in einem Entwicklungsforschungsprojekt ein hinsichtlich der Sprache voraussetzungsarmer Zugang zu Termen und deren Umformung entwickelt und in einer Internationalen Vorbereitungsklasse (IVK) mehrfach eingesetzt wurde. Den groben Entwicklungsverlauf nachzeichnend skizziert dieser Artikel die praktische Umsetzung und deutet an, wie einzelne Darstellungswechsel in der Klasse angeleitet und welche individuellen Entwicklungspotentiale offengelegt wurden.

Ausgangsproblem

Der mathematische Fachunterricht in einer IVK unterscheidet sich in mehrerlei Hinsicht vom deutschen Regelunterricht; insbesondere fällt die starke Heterogenität bezüglich der Leistungs- und Sprachniveaus auf. Daraus ergeben sich u.a. die Notwendigkeit für ein deutlich höheres Sprachbewusstsein (mehr dazu in Mink & Sauerwein, 2017) und vereinfachend formuliert das bildungssprachliche Dilemma *Vermeidung vs. Sprachentwicklung*. Diesem muss sich der Fachunterricht in einer IVK regelmäßig stellen, z.B. bei der Einführung von Variablen und Termen. Dieses konkrete Problem einer IVK war Anlass für unser Entwicklungsforschungsprojekt im Sommer 2016, da zu diesem Zeitpunkt keine speziellen Arbeitsmaterialen für IVKs zum Thema Variablen, Terme und Termumformungen erhältlich waren. Die beiden später erschienenen Arbeitsheftserien *Intro* (Schrödel Verlag) und *Prima ankommen* (Cornelsen Verlag) für IVKs führen Variablen, Terme und Termumformungen sehr knapp und unvermittelt ein. Deutsche Schulbücher sind aufgrund des linguistischen Zugangs zu Variablen (vgl. Prediger & Krägeloh, 2015) ebenfalls keine Alternative und somit entstand aus dem praktischen Problem die Zielsetzung, einen geeigneteren Zugang zu Variablen, Termen und Termumformungen zu entwickeln, der die Besonderheiten einer IVK berücksichtigt.

Historische Perspektive als Leitidee

Zentrales mathematisches Objekt der Lernumgebung sind *Figurierte Zahlen*, die als eine Folge von Punktmustern einschließlich der zugehörigen Zahlenfolge verstanden werden. Durch Fortsetzen und systematisches Abzählen solcher Punktmuster wurden schließlich im Dialog mit den Schülern erste termähnliche Ausdrücke aufgestellt, deren Notation sowie Gleichheit dann weiterführend in der Klasse ausgehandelt werden konnte (angelehnt an Wellstein (1978), Malle (1993) und Prediger (2009)). Per definitionem besitzen die Figurierten Zahlen drei natürlichen Darstellungsformen: Punktmuster, Zahlenfolge und Term.

Den Entwicklungsprozess leitend war das genetische Prinzip mit Rückgriff auf eine epistemologische Analyse von Kvasz (2008, 2015). In dieser zeichnet er den Entwicklungsverlauf der Mathematik indirekt nach, indem er sprachliche Veränderungen beginnend mit den Sprachen der (elementaren) Arithmetik, der (synthetischen) Geometrie und der Algebra bis hin zur Mengenlehre herausarbeitet (s. Abb. 1). Den Übergang zwischen den symbolischen und ikonischen Sprachen nennt er jeweils *Um-kodierung* (Kvasz, 2008, S. 14). Zur Abgrenzung der Sprachen ordnet er jeder Sprache objektive Potentialitäten zu, die die Sprache hinsichtlich ihrer logischen, expressiven, methodischen, integrativen, explanatorischen und konstitutiven Kraft charakterisieren.

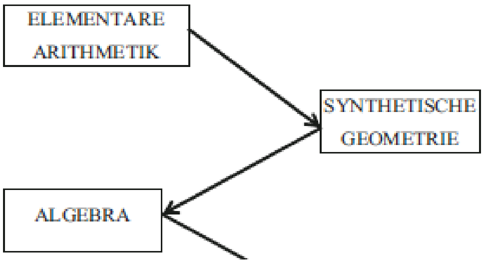

Abbildung 1: Verlauf der *Um-kodierung* (Kvasz, 2015, S. 54).

Die beiden in Abb. 1 dargestellten Um-kodierungen sind für die Lernumgebung von grundlegender Bedeutung: Während der erste Übergang durch die Figurierung von Zahlen durch die Pythagoräer stattfand, ist der zweite Übergang gerade die endgültige Variablenausprägung durch ihre Symbolnotation (Kvasz, 2008). Diese beiden in der Geschichte wichtigen Um-kodierungen werden in unserer Definition von Figurierten Zahlen sowie der Konstruktion (und Anpassung) der Lernumgebung wiederholt aufgegriffen (s. Abb. 2).

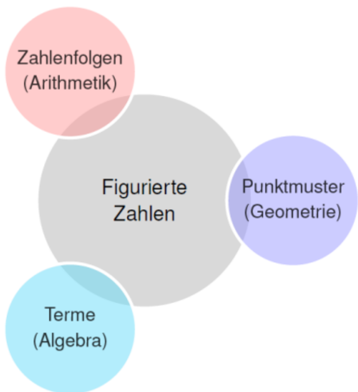

Abbildung 2: Figurierte Zahlen in den drei *natürlichen* Darstellungsformen.

Entwicklungsverlauf

Zu Beginn dominierte in meiner Lerneinheit die ikonische Darstellung aufgrund des Einstieges mit Punktmustern (s. Abb. 3), die in Zahlenfolgen umkodiert wurden.

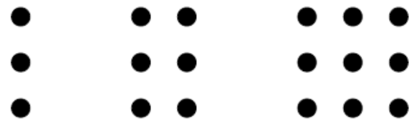

Abbildung 3: Einstiegsaufgabe.

Im weiteren Verlauf entstanden daraus Zählterme für die Punktanzahl eines beliebigen Bildes. Der Term wurde hier vor allem als *Rechenschema* aufgefasst und dementsprechend wurde seitens der Schüler die Gleichheit durch Einsetzen von Zahlen begründet. Die intendierte Beschreibungsgleichheit wurde im ersten Durchlauf nicht wahrgenommen. Aus zeitlichen Gründen und unpassenden Rahmenbedingungen verblieben wir auf der symbolischen Ebene und die Umformungsregeln wurden aus den gefundenen einsetzungsgleichen Zähltermen abgeleitet.

Die Rolle der Figurierten Zahlen als zentraler Gegenstand sollte im zweiten Durchlauf deutlich vergrößert werden. So wurden in einem zweiten Schritt ausgehend von Zahlenfolgen, wie z.B. der Folge der ungeraden Zahlen, Terme generiert, deren Gleichheit dann mithilfe von Figurierungen untersucht werden konnten (vgl. Sauerwein, 2017; Mink & Sauerwein, 2017). Innerhalb der Argumentationen fand eine Verschiebung der Wahrnehmung von Termen als Rechenschemata zu *Bauplänen* statt. Die Übergänge zwischen den Darstellungen (bzw. Sprachen) wurden mehrfach durchlaufen.

Im dritten Durchlauf, dem einzigen in einer deutschen Regelklasse (JS 7), war die Beschreibungsgleichheit der Klasse wiederum direkt klar.[1] Die Punktmusterdarstellungen der Figurierten Zahlen ermöglichten verschiedene Entwicklungen in Sprache und Notation. Darüber hinaus gab es gleich zu Beginn eine Überraschung: im Punktmuster aus Abb. 3 wurde ein rekursives Bildungsgesetz ähnlich der Fibonacci-Zahlen erkannt. In der Folge wurde die Aufgabe *Wieviel Punkte sind in Bild 27?* zu einem echten Problem – im mathematischen Sinne. Eine Schülerin äußerte folgende Lösungsidee:

Für Bild 27 müssen wir also 25 + 26 rechnen… Ach nein, wir müssen die Anzahl der Punkte aus Bild 25 + die Anzahl der Punkte aus Bild 26 rechnen.

Dies warf den funktionalen Aspekt auf und es fand eine erste Unterscheidung zwischen Funktionsargument und -wert in der Klasse statt.

[1] Dies kann zum Teil durch vorherige Erfahrungen mit Figurierten Zahlen erklärt werden, da diese in der Grundschule sehr präsent sind, z.B. in der *Zahlenbuch*-Reihe.

Diese funktionale Sichtweise hat auch den vierten Durchlauf geprägt.[2] Neben Zähltermen wurden zu meiner Verwunderung auch rudimentäre Flussdiagramme der Art $3 \xrightarrow{+2\ *3} 11$ verwendet, deren genaue Lesart (=Reihenfolge) dann weiter thematisiert werden konnte. Diese Darstellungen halfen auch im weiteren Verlauf bei Fragen der Art *Wann sind es… Punkte?* Eine weitere unerwartete Strukturierung der Quadratzahlen fand ein Schüler, indem er jeweils die Diagonale ausgezeichnet hat. Aufgrund der diskreten Punktmusterstruktur hat diese gleich viele Punkte wie eine Seite – abweichend vom „stetigen“ Quadrat. Die verbliebenen Reste sind zwei gleiche Dreieckszahlen, die ein Rechteck bilden wollen.

Fazit

Nach vier Durchläufen hat sich ein Grundgerüst der Lernumgebung etabliert, welches die Zielsetzung zu großen Teilen erfüllt. Trotz der schwierigkeitsarmen Punktmuster sind tiefere mathematische Einsichten und Fragestellungen möglich. Die Erfahrungen zeigen auch, dass dieser Zugang nicht nur in Internationalen Vorbereitungsklassen ertragreich sein kann.

Literatur

Kvasz, L. (2008): Patterns of Change. Basel: Birkhäuser.

Kvasz, L. (2015): Über die Konstitution der symbolischen Sprache der Mathematik. In: G. Kadunz (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*, Berlin: Springer, 51–67.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Mink, M. & Sauerwein, M. (2017): Mathematikunterricht in einer Internationalen Vorbereitungsklasse. In: A. Vohns (Hrsg.): Mitteilungen der GDM 103, 16–20.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Weinheim: Beltz, 213–234.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015): “x-arbitrary means any number, but you do not know which one” – The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In: A. Halai & P. Clarkson (Eds.), Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education. Rotterdam: Sense, 89–108.

Sauerwein, M. (2017): Figurierte Zahlen als Zugang zu Termumformungen - Unterrichtsentwicklung mit Lehrkräften. In: U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag. 813–816.

Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: *Didaktik der Mathematik, 6*(1), 54–64.

[2] Erfahrungen mit ehemaligen Schülern der IVK im Regelunterricht haben gezeigt, dass funktionale Ideen in der IVK zu wenig thematisiert wurden.