

## **Vorwissen für den Erwerb des Bruchkonzepts – Erhebungsinstrumente aus dem Projekt EWIWE**

Dass die Bruchrechnung die Schülerinnen und Schüler nicht nur zu Beginn der Sekundarstufe I vor Herausforderungen stellt (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Hecht & Vagi, 2010), ist ebenso gut gesichert wie die Bedeutung des Bruchzahlkonzepts für den späteren schulischen und beruflichen Erfolg (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; National Mathematics Advisory Panel, 2008). Andererseits scheint es eine Reihe von individuellen Lernvoraussetzungen zu geben, die für die Bruchrechnung relevant sind (Bailey, Siegler & Geary, 2014; Jordan, Hansen, Fuchs, Siegler, Gersten & Micklos, 2013) und bereits in der Primarstufe vorbereitet werden.

### **Projekt EWIWE**

In dem Forschungsprojekt EWIWE (Entwicklung und Auswirkungen individueller Facetten von Vorwissen für den Erwerb von Zahlkonzepten) wird der Frage nachgegangen, welche individuellen Lernvoraussetzungen interindividuelle Unterschiede der Lernenden in Kenntnissen zu den Bruchzahlaspekten und Bruchrechenoperationen erklären. Darüber hinaus wird untersucht, wie sich diese Lernvoraussetzungen vor der systematischen Behandlung der Bruchrechnung in der Sekundarstufe I entwickeln und wie sich die einzelnen Lernvoraussetzungen auf den Erwerb der Bruchzahlaspekte und Bruchrechenoperationen auswirken. Aus der Psychologie liegen bereits einige Längsschnittuntersuchungen mit einzelnen Prädiktoren vor, wohingegen die Mathematikdidaktik wenige Studien zur Entwicklung und kaum welche mit einem Fokus auf die Prädiktivität enthält. Damit werden folgende zentrale Projektziele verfolgt:

- Anpassung von bereits bestehenden bzw. Entwicklung von neuen Messinstrumenten für individuelle Lernvoraussetzungen sowie für Kenntnisse im Bereich der Bruchrechnung.
- Skalierung der entwickelten Erhebungsinstrumente und Anpassung bzw. Entwicklung von Stufenmodellen.
- Untersuchung der Prädiktivität der erhobenen Lernvoraussetzungen in einer Längsschnittstudie in der sechsten Jahrgangsstufe.

Die Anpassung bzw. Entwicklung von Messinstrumenten ist bereits abgeschlossen, was größtenteils auch auf die Skalierung zutrifft. Die Anpassung bzw. Entwicklung der Stufenmodelle befindet sich in der Anfangsphase, die Untersuchung der Prädiktivität ist noch ausstehend.

## Rahmenmodell des Gesamtprojekts

Lange vor der systematischen Behandlung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht der sechsten Jahrgangsstufe machen Lernende erste Vorerfahrungen zu einfachen Brüchen (Padberg, 2002; Wartha, 2007). Dieses intuitive Begriffsverständnis darf jedoch nicht mit einem tiefergehenden Verständnis zum Bruchzahlbegriff gleichgesetzt werden. Selbst zu einfachen Stammbrüchen sind die Vorkenntnisse zu Beginn der sechsten Jahrgangsstufe begrenzt. Neben dem informellen Vorwissen zu einfachen Brüchen werden weitere Lernvoraussetzungen untersucht, die aus theoretischer und empirischer Sicht für den Erwerb der Bruchzahlaspekte und Bruchrechenoperationen relevant erscheinen. Aus der Mathematikdidaktik sind dies das Operationsverständnis zur Multiplikation und Division natürlicher Zahlen (Hansen et al., 2015; Siegler & Pyke, 2013) sowie Kenntnisse im proportionalen Schließen mit natürlichen Zahlen (Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2009). Aus der psychologischen Forschungstradition werden das spontane Fokussieren auf Mengen (McMullen, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2015) und Relationen (McMullen, Hannula-Sormunen, Laakkonen & Lehtinen, 2016) sowie die ordinale Zahlvorstellung (number line tasks; Hansen et al., 2015; Jordan et al., 2013) fokussiert. In Anlehnung an Behr, Lesh, Post und Silver (1983) werden die Bruchkenntnisse mithilfe der Bruchzahlaspekte Teil-Ganzes-Aspekt, Verhältnisaspekt, Operatoraspekt, Quotientenaspekt und Maßzahlaspekt sowie der Bruchrechenoperationen Äquivalenz, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Problemlösen operationalisiert. In diesem Zusammenhang ist insbesondere zu beachten, dass das Verständnis des Bruchzahlkonzepts nicht eindimensional betrachtet werden kann, sondern verschiedene Facetten umfasst (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Darüber hinaus werden im Bereich der Bruchrechenoperationen sowohl rein innermathematische als auch anwendungsorientierte Aufgaben berücksichtigt. Abb. 1 und 2 veranschaulichen das Rahmenmodell des Gesamtprojekts für die Lernvoraussetzungen bzw. die Wissensbereiche aus der Bruchrechnung.

Individuelle Lernvoraussetzungen	Informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen	Operationsverständnis Multiplikation/ Division natürlicher Zahlen	Proportionales Schließen mit natürlichen Zahlen
	Spontanes Fokussieren auf Mengen	Spontanes Fokussieren auf Relationen	Ordinale Zahlvorstellung

Abb. 1: Rahmenmodell des Gesamtprojekts EWIWE (Lernvoraussetzungen)

Bruchzahl- aspekte	Teil-Ganzes			
	Verhältnis	Operator	Quotient	Maßzahl
Bruchrechen- operationen	Äquivalenz	Addition/ Sub- traktion	Multiplikati- on/ Division	Problemlösen

Abb. 2: Rahmenmodell des Gesamtprojekts EWIVE (Wissensbereiche aus der Bruchrechnung)

### Methodik der Pilotierungsstudie

Die Messinstrumente zu den individuellen Lernvoraussetzungen wurden in elf Grundschulklassen der Jahrgangsstufe 4 sowie in fünf gymnasialen Klassen der Jahrgangsstufe 5 eingesetzt ( $N = 325$ ). Die Diagnoseinstrumente zur Bruchrechnung wurden von 323 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 6 und 7 bearbeitet, die sich in sechs Mittelschulklassen der Jahrgangsstufe 6 und neun gymnasiale Klassen der Jahrgangsstufe 7 aufteilen. Die Instrumente zum Spontanen Fokussieren auf Mengen und Relationen wurden in allen teilnehmenden Klassen eingesetzt. Alle Messinstrumente wurden den Lernenden in Form von paper-pencil Tests zur Bearbeitung vorgelegt und größtenteils dichotom ausgewertet.

### Bisherige Ergebnisse

Die Reliabilitäten der Skalen sind, abgesehen von dem Spontanen Fokussieren auf Mengen und Relationen, akzeptabel bis sehr gut und liegen bei  $\alpha = .67-.93$ . In Hinblick auf die Entwicklung von Stufenmodellen im Bereich des proportionalen Schließens mit natürlichen Zahlen zeigen erste Raschanalysen, dass die entwickelten Messinstrumente für die Stichprobe eher schwer sind. Darüber hinaus hat sich in diesem Bereich gezeigt, dass die Lösungshäufigkeiten nicht nur in Hinblick auf die numerische Struktur, sondern auch kontextbezogen stark variieren.

### Diskussion

Die entwickelten Messinstrumente erwiesen sich größtenteils als geeignet. Lediglich die neu entwickelten Gruppentests zum Spontanen Fokussieren auf Mengen und Relationen zeigen noch Optimierungsbedarf. Im Bereich des proportionalen Schließens wurde in bisherigen Studien der Aufgabenkontext als Kontrollvariable nicht berücksichtigt (Van Dooren et al., 2009). In diesem Bereich zeigen die Detailanalysen, dass bei der Analyse der internen Struktur der Skalen die Aufgabenkontexte nicht vernachlässigt werden können.

## Literatur

- Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L. & Geary, D. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 447–455.
- Bailey, D., Siegler, R. & Geary, D. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, *17*, 775–785.
- Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis—emphasis on the operator construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13–47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–125). New York: Academic Press.
- Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study student's understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293–316.
- Hansen, N., Jordan, N., Fernandez, E., Siegler, R., Fuchs, L., Gersten, R. & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of sixth-graders' knowledge of fractions. *Cognitive Development*, *35*, 34–49.
- Hecht, S. & Vagi, K. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, *102*, 843–859.
- Jordan, N., Hansen, N., Fuchs, L., Siegler, R., Gersten, R. & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*, 45–58.
- McMullen, J., Hannula-Sormunen, M., Laakkonen, E. & Lehtinen, E. (2016). Spontaneous focusing on quantitative relations as a predictor of the development of rational number conceptual knowledge. *Journal of Educational Psychology*, *106*, 857–868.
- McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. & Lehtinen, E. (2015). Preschool spontaneous focusing on numerosity predicts rational number conceptual knowledge 6 years later. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 813–824.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: US Department of Education.
- Padberg, F. (2002). Anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff zu Beginn der Klasse 6. *Praxis der Mathematik in der Schule (PM)*, *3*, 112–117.
- Siegler, R. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*, 1994–2004.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*, 187–211.
- Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.