Alexandra SCHERRMANN, Ludwigsburg

# Bitte keinen „Bruch“! – Ein durchgängiges Konzept zur Förderung von Einsichten in das dezimale Stellenwertsystem von den natürlichen zu den rationalen Zahlen!?

Die Erweiterung des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen auf die gebrochen-rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}+$) stellt sich häufig als einen neuralgischen Punkt heraus (vgl. Prediger 2004; Schmassmann 2009): Denkgewohnheiten müssen geändert, bisher tragfähige inhaltliche Vorstellungen erweitert werden. Dies ist nicht nur bei den (allgemeinen) Brüchen, sondern auch bei den vermeintlich einfachen Dezimalbrüchen der Fall (z.B. Heckmann 2006; Heckmann 2011; Marxer & Wittmann 2012).

Hinzu kommt, dass diese Zahlbereichserweiterung häufig erfolgt, obwohl die Zahlvorstellung im Bereich der natürlichen Zahlen noch nicht ausreichend vorhanden ist (vgl. Moser Opitz 2009). Solche Schülerinnen und Schüler – mit Förderbedarf im arithmetischen Bereich – sind hier vorrangig im Blickfeld.

Die didaktische Herausforderung liegt bei diesen Schülerinnen und Schülern also darin, bei der Erweiterung des Zahlbereichs auf die Dezimalbrüche eine tragfähige Brücke zwischen den inhaltlichen Vorstellungen zu schlagen. Dies bedeutet, dabei *gleichzeitig* noch einmal das Fundament zu stärken: „Die besondere Herausforderung aber liegt darin, fehlenden und aktuellen Stoff aufgrund von fachlichen Zusammenhängen so zu kombinieren, dass sich der Lernrückstand verringern kann und der aktuelle Stoff wo immer möglich einbezogen wird. Das Aufarbeiten muss deshalb vernetzt geschehen“ (Schmassmann 2009, S.171). Doch wie kann das gelingen?

## Zentrale Konzepte und Inhalte

Zur Beantwortung erscheint es hilfreich, sich auf die zentralen Konzepte und Inhalte zu besinnen. Bezüglich der Primarstufe werden von Moser Opitz (2009) genannt: das Zählen in Schritten – auch in Schritten größer als 1, die Teil-Teil-Ganzes Beziehung, Einsichten in das Dezimalsystem und das Mathematisieren und Operationsverständnis (im Zahlbereich der natürlichen Zahlen). Die Einführung der Dezimalzahlen bietet eine gute Gelegenheit an den „Einsichten in das Dezimalsystem“ weiter zu arbeiten und so das Fundamt zu festigen.

## Unterrichtliche Zugänge zu den Dezimalbrüchen

In der Literatur (Schmassmann 2009) werden idealtypisch drei erste Zugänge zu den Dezimalbrüchen beschrieben: Ausgehend

- von den Größen: Dabei werden Vorerfahrungen aus der Primarstufe und aus dem Alltag genutzt, z.B. „wenige zehntel Sekunden schneller“
- vom Dezimalsystem: die Stellenwerttafel wird nach rechts erweitert, der Zahlenstrahl wird mit weiteren Zahlen „gefüllt“
- von den (allgemeinen) Brüchen: Übersetzung von gemeinen Brüchen mit einer Zehnerpotenz im Nenner in die Dezimalbruchschreibweise.

Da die „Einsichten in das Dezimalsystem“ als einen zentralen Inhalt in der Mathematik der Primarstufe gesehen wird (siehe oben) bietet es sich an, diesen als Anknüpfungspunkt zu wählen und von dort aus Bezüge zu den (allgemeinen) Brüchen und zu Größen herzustellen. Hierfür spricht außerdem, dass die anderen beiden Zugänge holprig erscheinen, wenn Lernrückstände aufgearbeitet werden müssen.

## Einsichten durch verschiedene Repräsentationsmodi

Folgt man der didaktischen Idee, dass sich ein gutes Verständnis mathematischer Inhalte durch das Übersetzen in verschiedene Repräsentationsmodi ausdrückt, so besteht der Anspruch, die symbolische (Zahlen-)ebene der Dezimalzahlen mit ikonischen Darstellungen zu verknüpfen und die Sprache als Denkwerkzeug für Einsichten zu nutzen.

Die Stellenwerttafel scheint naheliegend und ist eine viel verwendete ikonische Darstellung in den Schulbüchern der Sekundarstufe. Offensichtlich jedoch wird die Abstraktion, dass ein Plättchen einen unterschiedlichen Wert einnehmen kann in Abhängigkeit davon auf welcher Position es platziert wird, von den Schülerinnen und Schülern nicht immer adäquat geleistet. Eine interessante Möglichkeit solchen unzulässigen Vereinfachungen und den dahinterliegenden Verständnishürden entgegenzuwirken, bietet beispielsweise die interaktive Stellenwerttafel von U. Kortenkamp und S. Ladel (https://itunes.apple.com/de/app/place-value-chart/id568750442). Diese App betont die zentrale Idee des Bündeln und Entbündelns unseres Stellenwertsystems. Allerdings stößt die Anwendung durch die derzeit noch häufig unzureichend ausgebauten digitalen Möglichkeiten in Klassenzimmern an unterrichtspraktische Grenzen. Zudem stellt sich die Frage, ob es zur Einführung der Dezimalbrüche konkretere Möglichkeiten gäbe, also die handelnde bzw. enaktive Ebene im Unterricht realisiert werden können und welches Anschauungsmittel hierfür genutzt werden könnte.

## Handelnde Zugänge zu den Dezimalbrüchen

Als Anschauungsmittel „(..) empfehlen sich Modelle, bei denen die einzelnen Stellenwerte jeweils eigene Repräsentanten besitzen, und bei denen die

Größenbeziehungen zwischen den Stellenwerten aus dem Material hervorgehen“ (Heckmann 2007, S.45).

Eine in der Literatur genannte Möglichkeit stellt das Zehnersystemmaterial dar (Heckmann 2007). Der Vorteil der Bekanntheit aus der Primarstufe wird allerdings mit dem Nachteil erkauft, dass das Material umgedeutet werden muss und nicht gleichzeitig für den Bereich für alle positiven rationalen Zahlen genutzt werden kann. Zudem ist das Material bereits bei den Tausendsteln erschöpft. Weitere Teilungen bzw. Entbündelungen müssten dann rein gedanklich vollzogen werden.

Bevorzugt man eine lineare Darstellung und zerschneidet beispielsweise ein Meter lange Papiermaßbänder (vgl. Bescherer & Jöckel 2010, S.54), so kann man ein Tausendstel (1 mm) kaum noch realisieren und handhaben.

Nimmt man hingegen Plastilin als Veranschaulichungsmittel (Schmassmann 2009) so lassen sich aus einer etwa faustgroßen Plastilinkugel als „Einer“-Repräsentant auch noch kleinere Bruchteile, z.B. Zehntausendstel herstellen (vgl. Abbildung 1). Außerdem können nicht nur Dezimalbrüche, sondern prinzipiell auch natürliche Zahlen dargestellt werden.

**Abbildung 1: Dezimalbrüche mit Plastilin veranschaulichen**

Der Entstehungsprozess aus der „Einer“-Kugel, also der Teilungsvorgang, das Entbündeln, sollte unbedingt (sprachlich) reflektiert werden. Eine entsprechende Anregung könnte beispielsweise sein, darüber nachzudenken, weshalb von der kleinsten Bündelungseinheit/dem kleinsten Bruchteil immer zehn Stück daliegen, von den anderen (abgesehen vom Einer) hingegen lediglich neun (Scherrmann 2016).

Ein wesentlicher Vorteil des Materials liegt darin, dass die Grundidee des fortgesetzten Bündelns zu Bündel höherer Ordnung bzw. des fortgesetzten Entbündelns zu Bündel geringerer Ordnung auf der enaktiven Ebene vollzogen werden kann. Auch können Bezüge zu den (allgemeinen) Brüchen auf der enaktiven Ebene herausgearbeitet werden: Die Bruchteile (Zehntel, Hunderstel, …) sind immer relativ zueinander zu verstehen und keine absoluten Größen. Damit wird auch der Bruchbegriff insgesamt noch einmal gefestigt.

## Resümee

Das Problem, bisherige Denkgewohnheiten erweitern zu müssen, bleibt beim Übergang von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen bestehen und wird nicht durch das Veranschaulichungsmittel per se ausgeräumt. Jedes Veranschaulichungsmittel ist ein Modell, das heißt, es handelt sich immer um eine Idealisierung und weist Grenzen auf. Diese Grenzen müssen reflektiert werden und der Umgang mit dem Veranschaulichungsmittel muss erlernt werden. Der Zugang über das Plastilin scheint für Schülerinnen und Schüler intuitiv zu sein. Aus didaktischer Sicht sticht die Möglichkeit hervor, damit die fundamentale Idee des fortgesetzten Bündelns *und* Entbündelns unseres Stellenwertsystems auf vernetzte Weise zwischen den natürlichen und den positiven rationalen Zahlen aufzuarbeiten.

## Literatur


Bescherer, C., & Jöckel, S. (Eds.). (2010). *Denkstark 2 Mathematik Baden-Württemberg* (1st ed.). Braunschweig: Schroedel.

Fritz, A., & Schmidt, S. (Eds.). (2009). *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*. Weinheim, Basel: Beltz.

Heckmann, K. (2011). Ausbildung von Dezimalbruchverständnis über Sachprobleme? - eine differenzierte Analyse: Probleme im Dezimalbruchverständnis werden häufig nicht erkannt. *Der Mathematikunterricht*, (3), 55–62.

Heckmann, K. (2007). Von Zehnern zu Zehnteln. *Mathematik lehren, 142,* 45–51.

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern: Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos-Verl.

Marxer, M., & Wittmann, G. (2012). Den Stellenwerten eine Bedeutung geben: Dezimalbrüche multiplizieren jenseits der Kommaverschiebungsregeln. *Mathematik lehren*, (171), 44–48.

Moser Opitz, E. (2009). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe 1. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S.29–45). Weinheim, Basel: Beltz.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren*, (123), 10–13.

Scherrmann, A. (2016). "Ich leg da mal drei Kugeln dazu, dann tausche ich ein …": Dezimalzahlen in heterogenen Lerngruppen einführen. *Praxis Mathematik, 58*(70), 37–40.

Schmassmann, M. (2009). "Geht das hier ewig weiter?" Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert. In A. Fritz & S. Schmidt (Eds.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S.167–185). Weinheim, Basel: Beltz.