Nelli SCHMELZER, Bielefeld

Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

„Eine wesentliche Voraussetzung für das Treiben sinnhafter Mathematik sehe ich in der Ausbildung sogenannter Grundvorstellungen und Grundverständnisse“. (Bender 1991, S. 48)

Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es immer noch viele strittige Probleme, die fehlerhaft gelöst werden. Dies scheint wegen der Beschleunigung aller technischen Veränderungen unvorstellbar zu sein, ist aber immer noch zutreffend. Bea stellt bereits 1995 fest, dass „viele Menschen, unabhängig von ihrem Bildungsgrad, sind nicht in der Lage stochastische Informationen korrekt zu verarbeiten, aber meinen dies zu tun.“ (Bea 1995, S. 2) Dieses Zitat ist aus vielen Irrtümer und falsche Lösungen zum Ziegenproblem entstanden. Auch Biehler, Martingnon und Wassner (2004) betonen in der Arbeit über das Bayesianisches Denken, dass menschliches Denken mit probabilistischem Denken nicht übereinstimmt. Nach Hesse (2004) sind Menschen keine Zufallsgeneratoren. Er erklärt an einem Beispiel mit Münzenwurf, dass Menschen immer bestimmte Muster und Strukturen suchen und dadurch den Zufall nicht richtig verstehen können. Es ist zwar sehr erforderlich Muster und Variabilität in der Stochastik zu erkennen, was Schell (2013) nachdrücklich erläutert, aber meistens laufen die kognitive Prozesse mit dem mathematischen Verständnis nicht parallel ab. Die Ursachen für das Unverständnis der Wahrscheinlichkeit sehen viele Autoren hauptsächlich in den Differenzen zwischen den im Alltag aufgebauten sowie im Unterricht gebildeten Vorstellungen, die oftmals nicht miteinander im Einklang stehen.

In diesem Beitrag geht es darum, zunächst einmal die Grundvorstellungen im Sinne von vom Hofe (1995) zum Wahrscheinlichkeitsbegriff normativ aufzuarbeiten, um daran die weiteren Forschungsperspektiven aufzuzeigen.

Was versteht man unter Grundvorstellungen allgemein?

Gemäß dem Konzept von vom Hofe (1995) sind die Grundvorstellungen tragfähige mentale Modelle für einen Begriff oder ein Verfahren. Sie repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen, eine Verbindung zwischen Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungszusammenhänge herzustellen. Die Grundvorstellungen werden in drei Dimensionen aufgeteilt: normativ, konstruktiv, deskriptiv. Grundvorstellungen haben meistens keine eindeutige Zuordnung, es existieren mehrere für ein mathematisches Objekt. Grundvorstellungen sind dynamisch und unterliegen einer ständigen Veränderung. Im schulischen Kontext werden zwei Arten von Grundvorstellungen unterschieden: (1) *primäre* Grundvorstellungen haben ihre Wurzel in gegenständiger Handlungserfahrungen, (2) *sekundäre* Grundvorstellungen entstehen durch mathematische Repräsentation innerhalb einer fachlicher Unterweisung. In einer Aufgabe zu einem mathematischen Inhalt können Grundvorstellungen notwendig sein oder auch nicht. Bei der Analyse einer Aufgabe oder einem mathematischem Problem kann die Komplexität von Grundvorstellungen beschrieben werden, die als „Grundvorstellungsintensität“ bezeichnet wird: Man unterscheidet dabei nach elementarer, erweiterter und komplexer „Grundvorstellungsintensität“ (Kleine 2004; Blum, vom Hofe, Jordan, Kleine 2004). Borovcnik (1992) stellt in seinem Buch „Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik“ drei unterschiedliche Bereiche einer Beziehung zwischen Theorie, Realität und Subjekt in einem Dreiecksmodell vor, welches für die didaktische Theoriebildung ein hilfreiches Konstrukt ist. Die drei Bereiche werden von Borovcnik übereinstimmig und verflechtend beschrieben: allgemein kann man sagen, dass es immer ein Wechsel zwischen Ihnen (vgl. Abb. 1, links) stattfindet. Einerseits wird zum Beispiel die mathematische Theorie durch die Weltgegebenheiten weiter entwickelt, andererseits werden aber durch Theorien Erkenntnisse für die Realität gewonnen. Die Tendenz den Mathematikunterricht in einen bestimmten Bereich zu konzentrieren, verändert sich mit aktuellen Tendenzen und Schwerpunkten des Mathematikunterrichts. Dieses Dreiecksmodell erweitern wir mit Grundvorstellungen und ihren zugehörigen Dimensionen (Abb. 1, rechts): der Theorie entspricht die normative Sichtweise, dem Subjekt die deskriptive Dimension und der Realität eine konstruktive Sicht auf mathematische Inhalte.

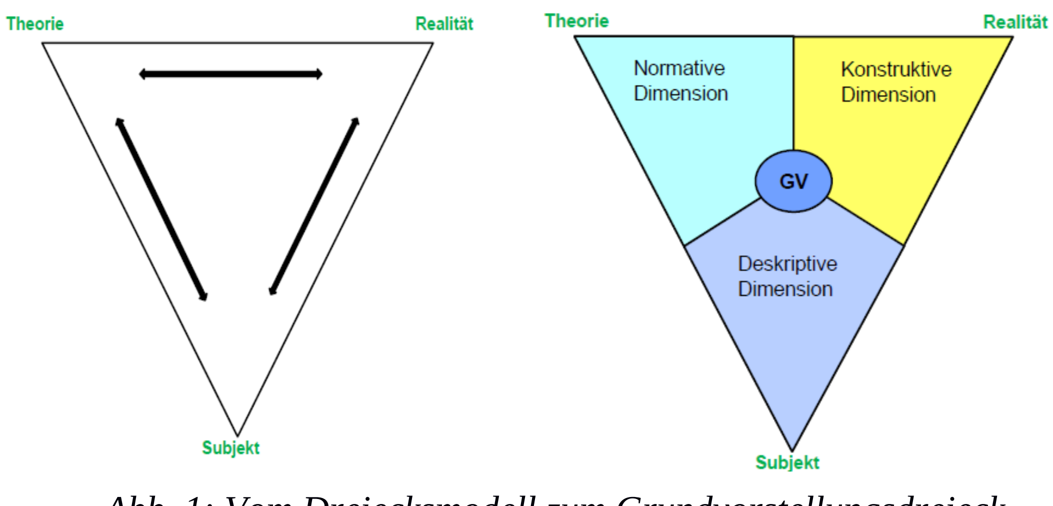

Abb. 1: Vom Dreiecksmodell zum Grundvorstellungsdreieck.

Die Grundvorstellungen brauchen wir einerseits als Basis für das Erlernen von stochastischen Methoden und Konzepte, andererseits aber auch als Voraussetzung, um stochastische Situationen außerhalb des Mathematikunterrichts tatsächlich wiederzuerkennen und in Folge auch interpretieren zu können.

Theoretische Überlegungen zu Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Gegenwärtig findet man in der Literatur zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zwei unterschiedliche Sichtweisen für eine Wahrscheinlichkeit. Die subjektivistische Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Information, die ein Subjekt oder eine Gemeinschaft von dem betreffenden stochastischen System hat, also basiert sich auf Vermutungen und innere Überzeugung. Objektivistische Sichtweisen sind dagegen eher unabhängig von menschlichen Kenntnis, man kann sie auch als intersubjektiv bezeichnen. Dem Wahrscheinlichkeitsbegriff werden vier verschiedene Sichtweisen zugeordnet. (1) Der prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht im Rahmen innermathematischer Systematik erfahrbar, er hängt von derzeit verfügbarem Informationsstand ab. (2) Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff beschreibt die Wahrscheinlichkeiten als Grenzwert der relativen Häufigkeiten in unendlich langen Versuchsserien. (3) Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff geht auf Laplace zurück und definiert die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses als Anteil der zu diesem Ereignis günstigen Fälle gegenüber der Anzahl gleichmöglicher Fälle. (4) Der axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff basiert auf dem Axiomensystem von Kolmogoroff, welches mathematische Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten festlegt. Malle und Malle (2003) beschreiben zu den jeweiligen Sichtweisen auf Wahrscheinlichkeitsbegriff in knapper Weise, ohne axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, vier Grundvorstellungen. Die erste Grundvorstellung ist *Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung*. Die zweite wird *Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen* genannt. Es folgt *Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil*. Obwohl sich schon Zusammenhänge zu den Sichtweisen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zeigen, fällt auf, dass diese normative Sichtweise für einen deskriptiven Ansatz nicht ausreichend ist. Um die normative Dimension auszubauen splitten wir jeden Wahrscheinlichkeitsbegriff nach mathematischen Inhalten auf und versuchen die aus normativer Sicht notwendigen Grundvorstellungen zu erfassen. Prozessbegleitend sollen weitere Parallelen und Beziehungen zu anderen mathematischen Inhalten inkludiert werden. Dabei zeigt sich, dass aufgrund der theoretischen Natur des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zahlreiche Gemeinsamkeiten zu Grundvorstellungen von Brüchen und zur Prozentrechnung zu finden sind, siehe zum Beispiel den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Ausblick

Im ersten Schritt ist das Ziel ein tragfähiges theoretisches Konzept auszubauen. Dieser soll bei der Ausbildung der Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff helfen. Darauf aufbauend soll die deskriptive Dimension erforscht werden, welche Grundvorstellungen von Schüler und Schülerinnen ausgeprägt wurden. Die Ermittlung von Fehlvorstellungen und die Analyse für deren Ursachen sind ebenfalls in diesem Zusammenhang zu sehen und sind ein weiteres Forschungsziel in diesem Forschungsvorhaben.

Literatur

Bea, W. (1995). Stochastisches Denken: Analysen aus kognitionspsychologischer und didaktischer Perspektive. Frankfurt: Peter Lang.

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen: ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen:* Festschrift für Heinz Griesel, Hannover: Schroedel, 48-60.

Biehler, R., Martingnon, L., Wassner, Ch. (2004). Bayesianisches Denken in der Schule. *Unterrichtswissenschaft* 32 (1), 58-96.

Borovcnik, M. (1992). Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik,* Mannheim: BI.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als diagnostisches und aufgabenanalytisches Instrument bei PISA. In: M. Neubrand (Hrsg.): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000,* Wiesbaden: VS, 145-157.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2005). Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Berlin: Springer

Hesse, Ch. (2016). Der SchnellerSchlauerMacher für Zufall und Statistik. Berlin, Heidelberg: Springer.

Kleine, M. (2004). Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I.. Hildesheim: Franzbecker.

Malle, G. & Malle, S. (2003), Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematiklehren*, 118, 52-56.

Schnell, S. (2013). Muster und Variabilität erkunden. Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Forschung des Mathematikunterrichts.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. *Texte zur Didaktik der Mathematik.* Berlin, Heidelberg: Spektrum.