Alexander SCHÜLER-MEYER, Dortmund

Definieren im Übergang zur Hochschule – Welche Ressourcen haben Lernende, welche Unterstützung brauchen sie?

1. Einleitung

Der Übergang von der Schule zur Hochschule stellt viele Lernende vor Herausforderungen. Diese Herausforderungen haben vielfältige Ursachen. In der Schulmathematik werden Objekte vielfach erfahrungsbasiert erarbeitet, während Objekte in der Hochschule durch Definitionen spezifiziert und ihre Merkmale durch logische Deduktionen bestimmt werden (de Guzmán, Hodgson, Robert & Villani, 1998, S. 753). Allerdings nutzen Lernende im Übergang Definitionen nicht angemessen (Vinner, 1991).

Der formale und abstrakte Grenzwertbegriff stellt eine fundamentale Idee der Analysis in der Hochschule dar. Gleichzeitig sind Lernenden Grenzwerte aus der Schulmathematik vertraut, sie werden oft mithilfe der propädeutischen Metapher des „geht gegen" konzeptualisiert. Hieraus ergibt sich das Erkenntnisinteresse, wie im Übergang Schule-Hochschule an solche vorhandenen mathematischen Ressourcen angeknüpft werden kann, um die Lernenden zu unterstützen, sich in Hochschulmathematik einzufinden.

Im Folgenden wird eine Design-Research Studie im Übergang Schule-Hochschule vorgestellt, in der sich Lernende in Praktiken des Definierens einfinden, indem Sie die Epsilon-n-Definition von konvergenten Folgen nacherfinden. Der Schwerpunkt der Studie liegt auf der Aktivierung schulischer Ressourcen.

2. Definieren im Übergang Schule-Hochschule

Lernende haben viele Intuitionen zum Grenzwertbegriff (Oehrtmann, 2009). Diese Intuitionen können fruchtbar gemacht werden. Przenioslo (2005) schlägt dafür das Klassifizieren von Folgen durch Epsilonstreifen vor. In dieser Aktivität können Lernenden ihr Verständnis von Konvergenz weiterentwickeln, hin zu „fast alle Folgeglieder liegen im Streifen" (Przenioslo, 2005, S. 88, Übersetzung ASM). Die Intuitionen und Metaphern der Lernenden können durch entsprechende Lehrendenunterstützung und geeignete Aktivitäten zu einem formaleren und abstrakteren Grenzwertbegriff weiterentwickelt werden. Dabei wird jedoch bisher nicht systematisch an schulische Ressourcen angeknüpft.

Definitionen sind ein zentrales Element der Hochschulmathematik. Dennoch haben viele Lernende Schwierigkeiten, Definition zu nutzen. Gründe dafür sind, dass Definitionen Objekte „künstlich" erscheinen lassen, und Lernende keine Erfahrungsbasis mit definierten Objekten sammeln konnten (Vinner, 1991). Zugleich werden Lernende kaum in Praktiken des Definierens eingeführt – Lernende kennen Definitionen oft nur vom Beweisen. Zugleich aber können Lernende die Rolle von Definitionen besser verstehen, wenn sie diese in Praktiken des Definierens selbst erarbeitet haben (Swinyard, 2011).

Hieraus folgt, dass sich Praktiken des Definierens insbesondere eignen, um Lernende zu unterstützen, von ihrem informellen, Metapher-basierten Verständnis zu einem formaleren und abstrakteren Verständnis voran zu schreiten. Dabei können die Lernenden durch den informellen Zugang vermutlich leichter an ihre schulischen Ressourcen anknüpfen, umso mehr, wenn eine entsprechende Unterstützung durch Lehrende erfolgt.

3. Methodologisches: Design Research und Commognition

Der vorliegenden Studie liegt eine 5x90 Min. Unterrichtseinheit zugrunde. Die Unterrichtseinheit basiert auf „Realistic Mathematics Education” (RME), d.h. das Objekt konvergente Folge entsteht als das Produkt eigenaktiver Erkundungen (vgl. Epsilonstreifenaktivitäten; Gravemeijer & Doorman, 1999). RME ist ein in der Hochschulmathematik erfolgreicher Ansatz. Die Unterrichtseinheit wurde im Forschungsprogramm des Design-Research in drei Designzyklen iterativ entwickelt. Hier werden Daten der dritten Iteration der Einheit genutzt.

Die hypothetische Lerntrajektorie der Einheit basiert auf den vorhandenen Forschungsergebnissen zum Lernen von Grenzwerten. Sie ist wie folgt aufgebaut:

Sitzung 1	*Sitzung 2*	*Sitzung 3*	*Sitzung 4*	*Sitzung 5*
Klassifizieren von Folgen mit Epsilonstreifen	Definieren konvergenter Folgen	Nachweis von Konvergenz mit Definition	Stetigkeit erkunden und definieren	Nachweis von Stetigkeit mit Definition

Die Unterrichtsprinzipien, die das Lehren und Lernen in der Einheit strukturieren, sind die folgenden:

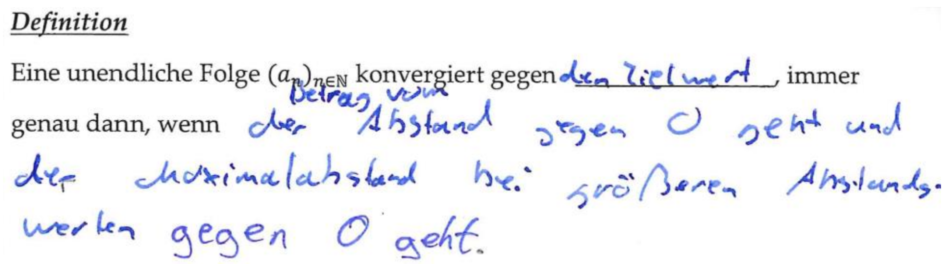
- Prinzip der minimalen Hilfen und Scaffolding;
- Prinzip des „Defining as a Mathematical Activity” (DMA, Zandieh & Rasmussen, 2010);
- Prinzip der Formalisierung durch Darstellungsvernetzungen zwischen graphischen, sprachlichen und symbolischen Darstellungen.

Die Unterrichtseinheit ist in einem Brückenkurs verortet, der im Jahr 2016/17 in der Oberstufe eines Gymnasiums vom Autor durchgeführt wurde. An diesem Kurs haben zwölf mathematisch interessierte Lernende der 11. Klassen teilgenommen. Die Unterrichtseinheit wurde von zwei Masterstudierenden mit Tutorerfahrungen in Analysis durchgeführt.

Die Lernprozesse und die Aneignung der Praktik des Definierens werden mit der Theorie der Commognition untersucht (Sfard, 2008). Commognition konzipiert Lernen als die Veränderung von Diskursen, d.h. als die Veränderung diskursiver Äußerungen hin zu mathematisch tragfähigen Äußerungen. Mathematische Diskurse unterscheiden sich hinsichtlich ihres Gebrauchs von *Schlüsselwörtern*, von *Darstellungen und Symbolen* und von *Narrativen* wie Definitionen oder Beweisen. Weiterhin unterscheiden Sie sich in ihren *Praktiken*, die auf das Erzeugen von Narrativen abzielen, wie dem Beweisen oder dem Definieren (Sfard, 2008, S. 134). In dieser Studie werden die Praktiken der Lernenden untersucht, sowie die erzeugten Definitionen – im Sinne der Theorie als Narrative verstanden –, die zunächst in ihren zentralen Entwicklungsschritten rekonstruiert werden.

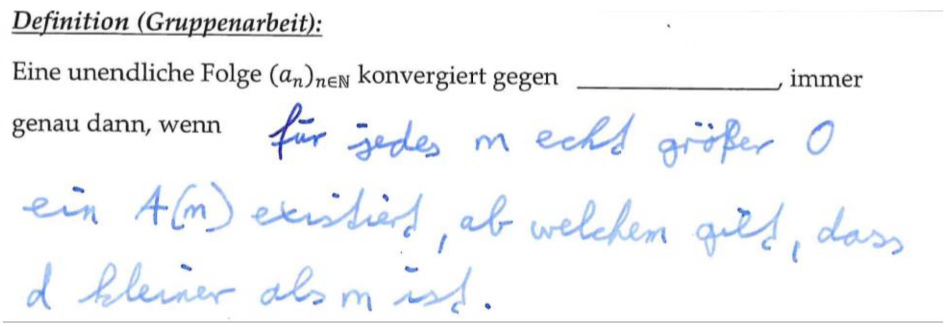
4. Analyse von Schülerdokumenten

Im Folgenden sind zwei Definitionen abgebildet, die zentrale Entwicklungsschritte darstellen. Die erste Definition wurde von den Lernenden in der ersten Partnerarbeitsphase erzeugt. Die Lernenden hatten die Vorgabe, alle in der ersten Sitzung erarbeiteten Objektfacetten zu berücksichtigen (Abb. 1). Die zweite Definition ist das finale Produkt der Sitzung, welches nach einem Vergleich der in Partnerarbeit erzeugten Definitionen (Narrative) in Gruppenarbeit mit Lehrendenunterstützung erarbeitet wurde (Abb. 2).


<u>*Definition*</u>

Eine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Zielwert, immer genau dann, wenn der Betrag vom Abstand gegen 0 geht und der Maximalabstand bei größeren Abstandswerten gegen 0 geht.

Abb. 1: in Partnerarbeit erstellte Definition (geschrieben von Dennis).


<u>*Definition (Gruppenarbeit):*</u>

Eine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ____________, immer genau dann, wenn für jedes m echt größer 0 ein A(m) existiert, ab welchem gilt, dass d kleiner als m ist.

Abb. 2: am Ende der Sitzung gemeinsam erarbeitete Definition.

Die zweite Definition ist eine tragfähige mathematische Definition, die nahezu der Epsilon-n-Definition von konvergenten Folgen entspricht. In der ersten Definition werden relevante Objektfacetten durch Schlüsselwörter

(„Maximalabstand“) gefasst; in der zweiten Definition werden nun symbolische Darstellungen verwendet. Zudem werden in der zweiten Definition mathematische Schlüsselwörter genutzt („existiert“, „gilt“), die für eine logisch-deduktiv geordnete Definition zentral sind. Das Symbol „*A(m)*“ steht hier für n_ε. Die Lernenden haben *A(m)* nacherfunden, indem sie Schulwissen über funktionale Zusammenhänge aktiviert haben. Dies zeigt, dass die Lernenden schulisches Vorwissen als Ressource nutzen konnten.

5. Diskussion

Die Studie bestätigt den vielfachen Befund, dass Lernende aus reichhaltigen Aktivitäten ein tragfähiges Verständnis hochschulmathematischer Objekte gewinnen können. Darüber hinaus zeigt Sie, dass die zentralen Entwicklungsschritte der Definition eng mit der Aktivierung und Neu-Durcharbeitung des schulischen Vorwissens und der Übernahme von Schlüsselwörtern durch die Lernenden zusammenhängen. Erst diese Schlüsselwörter erlauben es, die in der Aktivität implizit bleibende logisch-deduktive Ordnung in der Definition zu explizieren.

Literatur

De Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A. & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In G. Fischer & U. Rehmann (Hrsg.), *Proceedings of the international Congress of Mathematicians* (S. 747-762). Berlin: Documenta Mathematica.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3), 111-129.

Oehrtmann, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 396-426.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93-114.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 65-81). New York, NY et al.: Kluwer Academic.

Zandieh, M. & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 57-75.