Andreas SCHULZ, Zürich

Welchen Beitrag leisten multiplikatives Denken sowie Fähigkeiten zum Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen zur erfolgreichen halbschriftlichen und schriftlichen Division?

Als wichtiger Meilenstein der Entwicklung mathematischen Verständnisses am Übergang von der Grund- zur Sekundarstufe gilt das multiplikative Denken (Carrier, 2014; Clark & Kamii, 1996). Dies verdeutlicht u.a. eine Analyse notwendiger und unterscheidbarer Verständnis-Grundlagen für eine erfolgreiche Anwendung halbschriftlicher Rechenstrategien in der mehrstelligen Division (Schulz, 2018): Bei der wiederholten Addition bzw. Subtraktion (Tab.: 1. Spalte) wird der Divisor in bestenfalls kleinen Vielfachen zum Dividenden aufgefüllt bzw. vom Dividenden abgezogen. Bei diesem Vorgehen lassen sich sowohl die Gesamtmenge (Dividend) als auch der Divisor als Mehrfaches der Einheit „1“ interpretieren. Dies entspricht additivem Denken (Downton, 2008). Weitergehend lassen sich bei der Division zwei 10er-Analogien unterscheiden (2. Spalte). Falls diese unverstanden memoriert werden, besteht die Gefahr der Verwechslung, was nicht selten zu einem Ergebnis wie z.B. 360:40 = 90 oder = 900 führt.

Wiederholte Add./ Subtr.	**10er-Analogien**	**Schrittweise**	**Nachbar-Aufgabe**	**Multiplikat. Verändern**
360:40 = ? 80 + 80 + … 360 – 40 …	a) 360:4 = 90 36:4 = 9 b) 1800:200 = 9 18: 2 = 9	<u>192:12 = ?</u> 120:12 = 10 24:12 = 2 48:12 = 4	<u>294:6 = ?</u> 300:6 = 50 6:6 = 1 50 – 1= 49	a) 360:40 = ? 360:10 = 36 36: 4 = 9 b) 360:40 = = 180:20 = = 90:10 = 9

Tab.: Rechenstrategien in der mehrstelligen Division

Die schrittweise Zerlegung des Dividenden in einfacher berechenbare Vielfache des Divisors mit anschließender Addition der Teilquotienten (3. Spalte) als universell anwendbare Strategie basiert u.a. auf dem Erkennen und Nutzen von größeren Vielfachen des Divisors. Dies kennzeichnet den Übergang zum multiplikativen Denken, bei dem die Vorstellung der Multiplikation als wiederholte Addition nicht mehr ausreichend ist. Zentral hierbei ist das simultane Operieren mit Einheiten auf zwei Abstraktionsebenen, i) dem Divisor selber, der ein Vielfaches der Einheit „1“ darstellt, und ii) dessen Beziehung zum Multiplikator, wobei der Divisor als neue größere Einheit (>1) in den Blick genommen wird. Eng damit verbunden ist ein erstes Denken in proportionalen Zusammenhängen zwischen einer neuen Einheit (hier dem Divisor) und ihren Vielfachen (hier den Zerlegungen des Dividenden als Teilprodukte). Formal lassen sich diese Aspekte multiplikativen Denkens im Distributivgesetz erkennen.

Multiplikatives Denken in der neuen, größeren Einheit (des Divisors) kennzeichnet sehr deutlich das Erkennen und Nutzen von Nachbaraufgaben (4. Spalte): Der Quotient eines erweiterten Dividenden (z.B. 300 statt 294) unter Beibehalten des Divisors muss nachfolgend um die Anzahl der ergänzten Vielfachen des Divisors korrigiert werden, z.B. 300:6 = 50 als Zwischenergebnis enthält den Divisor (die 6 als hier relevante Einheit) einmal zu viel.

Strategien des multiplikativen Veränderns (5. Spalte) kennzeichnen ein nochmals komplexeres Verständnis multiplikativer Zusammenhänge: a) Ein Divisor kann multiplikativ zerlegt werden, um einfachere Teildivisionen zu erhalten, oder b) Dividend und Divisor werden als Verhältnis interpretiert, welches sich bei gleichsinnigem multiplikativem Verändern nicht ändert. Letztendlich liegen diese anspruchsvollen Konzepte auch dem Nutzen von 10er-Analogien (Spalte 2) zugrunde, was deren verbreitete Fehleranfälligkeit erklären kann.

Vielfache Autoren haben die essentielle Bedeutung des Erkennens und Nutzens von Zusammenhängen zwischen Zahlen für eine erfolgreiche Anwendung von Rechenstrategien dokumentiert (vgl. Schulz 2018). An diesem Forschungsstand schließen die Forschungsfragen der präsentierten Studie an:

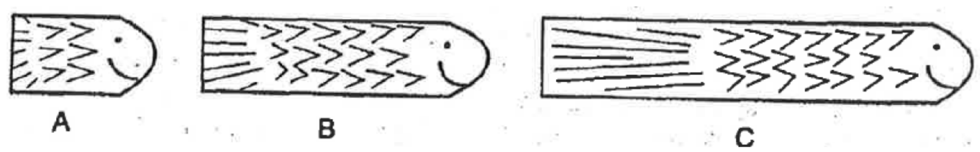
1. Leisten Fähigkeiten zum multiplikativen Denken einen maßgeblichen Beitrag zum Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen?

2. Stellen Fähigkeiten zum multiplikativen Denken und zum Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen unterschiedliche konzeptuelle Grundlagen zur erfolgreichen Lösung von Aufgaben zur mehrstelligen Division (mittels Strategien oder Algorithmen) dar?

Von 472 Kindern aus den Klassenstufen 4 und 5 in Baden-Württemberg wurden im Frühsommer die Rechenwege zu sechs Divisionsaufgaben codiert (114:6 / 360:40 / 294:6 / 2700:9 / 1800:200 / 192:12) und daraus zwei Skalen für die erfolgreiche Anwendung von Strategien oder Algorithmen gebildet. Fähigkeiten zum Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Zahlen (vgl. Schulz 2018) wurden mit Aufgaben zum Fortsetzen von Reihen, zum Einsetzen fehlender Zahlen in Gleichungen, zur Identifikation von passenden Zahlenpaaren zum Produkt 750, und zum Fortsetzen von Aufgabenmustern erfasst. Zur Messung von Fähigkeiten zum multiplikativen Denken dienten angepasste Aufgaben von Clark & Kamii (1996), in denen fehlende Zahlen zu multiplikativen Zusammenhängen zu ergänzen waren (Auszug):

Hier siehst du ein Bild von drei Fischen. Ihre Länge in Wirklichkeit ist ...

Fisch A: 5 cm Fisch B: 10 cm Fisch C: 15 cm



Fisch B bekommt zweimal so viele Mücken wie Fisch A, weil er zweimal so lang ist.

Fisch C bekommt dreimal so viele Mücken wie Fisch A, weil er dreimal so lang ist.

b) Fisch B bekommt 4 Mücken.

Wie viele Mücken bekommen die beiden anderen Fische?

Fisch A	Fisch B	Fisch C
	4 Mücken	

Abb. 1: Items (Auszug) zum multiplikativen Denken (vgl. Clark & Kamii, 1996)

Die Analyse der statistischen Zusammenhänge erfolgte mittels Strukturgleichungsmodell (CMIN/df= 2.010; CFI= 0.966; RMSEA= 0.46; N= 472). Dargestellt sind die signifikanten Beta-Gewichte, wobei die Striche an den latenten Variablen die Anzahlen ihrer manifesten Indikatoren wiedergeben:

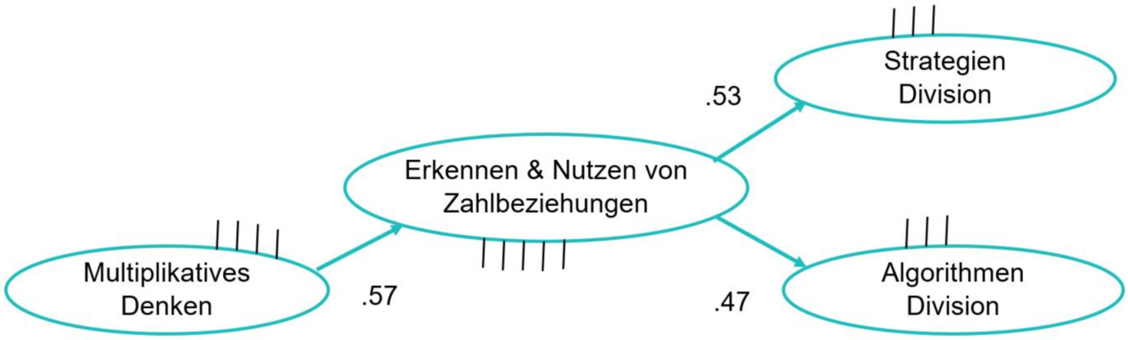


Abb. 2: „Multiplikatives Denken" und „Fähigkeiten zum Erkennen & Nutzen von Beziehungen zwischen Zahlen" – Grundlagen der erfolgreichen Anwendung von Strategien und Algorithmen in der mehrstelligen Division?

Fähigkeiten zum multiplikativen Denken leisten demnach einen maßgeblichen Beitrag zum Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen (β=0.57; R^2=0.33) (vgl. Forschungsfrage 1). Beide Fähigkeiten lassen sich zudem als unterscheidbare konzeptuelle Grundlagen zur erfolgreichen Lösung von Aufgaben zur mehrstelligen Division (Strategien / Algorithmen) in unterschiedlichen Skalen operationalisieren (vgl. Forschungsfrage 2).

Auffällig ist, dass *Fähigkeiten zum multiplikativen Denken* lediglich vermittelt über *Fähigkeiten zum Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen* einen

Beitrag zur *erfolgreichen Anwendung von Strategien* bzw. *Algorithmen in der mehrstelligen Division* leisten, jedoch nicht (ebenfalls) auf direktem Wege ($p>0.1$). Dieser überraschende Befund gibt Anlass, die theoretischen Annahmen der Studie mit den im Strukturgleichungsmodell spezifizierten gerichteten Zusammenhangshypothesen nochmals zu überdenken und u.a. mit weiteren Hintergrundinformationen über unterrichtliche Lerngelegenheiten zu hinterfragen: Möglicherweise entwickeln sich Fähigkeiten zum multiplikativen Denken am Übergang von der Grund- zur Sekundarstufe nicht vorrangig in Sachkontexten zu multiplikativen Zusammenhängen (z.B. Preis-Menge-Verhältnis) und unterstützen dann das Verständnis von Rechenstrategien, sondern andersherum: Beim Anwenden und dem Austausch über Rechenstrategien entwickelt sich multiplikatives Denken, welches dann beim Modellieren proportionaler Zusammenhänge angewendet und vertieft wird. Statt gerichteter Zusammenhänge erscheinen aus dieser Perspektive wechselseitige Beziehungen zwischen den Konstrukten plausibler.

Im Vortrag vorgestellt wurden Überlegungen zu alternativen oder ergänzenden statistischen Analyseverfahren für die weitergehende Auswertung des vorliegenden Datensatzes, welche über die bisher ausschließlich realisierte Identifikation von korrelativen Zusammenhängen (bzw. Regressionsgewichten) im Rahmen des gewählten variablenzentrierten Ansatzes hinausgehen: Zunächst könnten innerhalb der Skalen einfachere und schwerere Items genutzt werden, um unterschiedliche Niveaus innerhalb der gemessenen Fähigkeiten zu charakterisieren (z.B. mittels Raschmodell). Damit verbunden bietet es sich an, korrelative Zusammenhänge zwischen den Variablen über die Identifikation von Profilen in einem personenzentrierten Ansatz (z.B. latente Klassenanalyse) zu erklären und somit die quantitativ erfassten Informationen für die Analyse und Interpretation qualitativ anzureichern.

Literatur

Carrier, J. (2014). Student strategies suggesting emergence of mental structures supporting logical and abstract thinking: Multiplicative reasoning. School Science and Mathematics, 114(2), 87–96.

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. Journal for Research in Mathematics Education, 27(1), 41–51.

Downton, A. (2008). Links between children’s understanding of multiplication and solution strategies for division. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia (pp. 171–178). Adelaide, SA.

Schulz, A. (2018). Relational reasoning about numbers and operations - foundation for calculation strategy use in multi-digit multiplication and division. Mathematical Thinking and Learning, 20(2), 108-141.