

Orientierung am Zahlenstrahl – Funktionen und Deutung

Der Zahlenstrahl ist ein zentrales Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule und der weiterführenden Schulen. Seine besonderen Potentiale als Arbeitsmittel über mehrere Schulstufen hinweg sind sein hoher Abstraktionsgrad und seine Flexibilität in Bezug auf Zahlenräume, Zahlbereiche und Aufgabenstellungen. Diese Potentiale sind aber auch eine mögliche Hürde beim Umgang mit dem Zahlenstrahl: Der Zahlenstrahl verlangt die *selbstständige* Konstruktion und Deutung von Zahlen und Zahlbeziehungen – Inhalte, die der Zahlenstrahl eigentlich zu erschließen helfen soll (vgl. z. B. Lorenz 2008, 11; Selter 1994, 84). Im folgenden Beitrag werden Deutungsweisen und mögliche Fehldeutungen am Zahlenstrahl untersucht. Vorher wird geklärt, welche verschiedenen Funktionen der Zahlenstrahl (auch über den Mathematikunterricht hinaus) haben kann.

Funktionen des Zahlenstrahls

Der Zahlenstrahl kann verschiedene Funktionen haben. So wird er zum Beispiel im Alltag als Messinstrument genutzt (Litermaß, analoge Waagen, Thermometer oder Tachometer, ...) oder findet sich in Diagrammen (mit x- und y-Achsen). Eine weitere Funktion hat der Zahlenstrahl als Modell: Es wird angenommen, dass Zahlen als *mentaler Zahlenstrahl*, als räumliche, lineare Anordnung repräsentiert sind – bei Erwachsenen im westlichen Kulturkreis meist von links nach rechts (vgl. z. B. Dehaene 1999, 98f.). Diese Annahme hat dazu geführt, dass der Zahlenstrahl in der Kognitionspsychologie häufig als Instrument genutzt wird (eine weitere Funktion des Zahlenstrahls), um Nachweise von und Erkenntnisse über Zahlvorstellungen und zahlverarbeitende Prozesse zu gewinnen. In diesem Zusammenhang wird jedoch mittlerweile darauf hingewiesen, dass der Einsatz des Zahlenstrahls als Messinstrument dazu führen kann, dass die räumliche Anordnung von Zahlen im Kopf kaum noch hinterfragt wird (vgl. z. B. Ebersbach et al. 2015, 137). Ebenso wird darauf hingewiesen, dass so möglicherweise nicht nur die mentale Repräsentation von Zahlen und deren Entwicklung gemessen werden, sondern eher individuelle Strategien und Deutungsmuster und die Kenntnisse des Instruments, die ggf. in der Schule erworben werden (vgl. ebd.).

Der Zahlenstrahl als didaktisches Werkzeug

Eine weitere Funktion hat der Zahlenstrahl als didaktisches Werkzeug. Wie alle Arbeitsmittel soll der Zahlenstrahl im Mathematikunterricht die gemein-

same Konstruktion und Reflexion mathematischer Inhalte ermöglichen. Besonders eignet sich der Zahlenstrahl dabei für die Thematisierung von Zahlen, Zahlbeziehungen, Operationen und Rechenstrategien (vgl. z. B. Selter 2017, 32). Dabei ist der Zahlenstrahl gekennzeichnet durch eine Vielzahl verschiedener Strukturierungselemente (beschriftet oder unbeschriftet; beginnend bei Null oder nicht; Skalierung in N vollständig oder nicht; Skalierung regelmäßig oder nicht; Stufenzahlen hervorgehoben oder nicht; ...). Unter anderem diese Vielzahl an kombinierbaren Strukturierungselementen sorgt dafür, dass der Zahlenstrahl einerseits sehr vielfältig einsetzbar ist, andererseits jedoch dafür, dass er immer wieder neu gedeutet und mit mathematischer Bedeutung gefüllt werden muss. Diese Deutung ist immer relational, da auf dem Zahlenstrahl (außer bei größer/kleiner-Relationen) immer mindestens drei Punkte in Beziehung gesetzt werden müssen – und zwar geometrisch und arithmetisch. Die arithmetischen Beziehungen können dabei additiv sein (die Zahl zwischen 7 und 15), oder multiplikativ sein (zwischen der 0 und der 10 sind vier äquidistante Skalierungsstriche, wofür stehen diese Striche?). Ein Beispiel: Zwei Punkte auf dem Zahlenstrahl sind gegeben (z. B. 7 und 15), genau in der Mitte dieser beiden Punkte wird ein dritter Punkt gegeben, gefragt ist nach der Zahl, die hier eingetragen werden kann. Gelöst werden kann diese Aufgabe, indem das geometrische Wissen um die halbierte Strecke und das arithmetische Wissen um die Zahl, die von 7 und 15 gleichweit entfernt ist, aktiviert wird.

(Fehl-) Deutungen am Zahlenstrahl

Die Vielzahl an Strukturierungselementen und die geometrischen und arithmetischen Herausforderungen bei der Interpretation von Zahlenstrahlen führt zu verschiedenen (Fehl-) Deutungen. So konnte gezeigt werden, dass der Zahlenstrahl sowohl dinglich als auch relational gedeutet werden kann (vgl. z. B. Söbbeke 2005). Ein in der Literatur häufig genannter, typischer Fehler ist die Vermischung von ordinaler und kardinaler Deutung am Zahlenstrahl: so wird zum Beispiel die Zahl 37 im *dritten* Zehnerabschnitt eines skalierten Zahlenstrahls vermutet, durch die Fehldeutung, dass die Dreißiger im dritten Abschnitt liegen. Der empirische Nachweis der tatsächlichen Häufigkeit dieses Fehlers steht m. E. noch aus. Ein weiterer Befund in Bezug auf die Deutung und Nutzung von Skalierungsstrichen weist darauf hin, dass Skalierungsstriche teilweise eher verwirren, als dass sie bei der genauen Verortung von Zahlen helfen. Dies liegt nicht nur daran, dass Skalierungsstriche nicht immer angemessen gedeutet werden, sondern auch daran, dass sie möglicherweise ein individuelles strategisches Vorgehen erschweren bzw. wenig naheliegend erscheinen lassen (vgl. z. B. Peeters et al. 2016, Siegler &

Thompson 2014). Ein Beispiel: Bei der Verortung der 25 an einem durchskalierten Zahlenstrahl von 0 bis 100, wird sich ein Kind möglicherweise eher an den gegebenen Skalierungsstrichen orientieren (mit allen Möglichkeiten der Fehldeutung), als dass es sein geometrisches und arithmetisches Wissen aktiviert und die 25 am Ende des ersten Viertels der Gesamtstrecke positioniert.

Forschungsinteresse und Design

Für diesen Beitrag wurden folgende Forschungsfragen fokussiert:

- Welche typischen Fehler (3. und 5. Klasse) lassen sich bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Zahlauffassung und Zahldarstellung am Zahlenstrahl identifizieren?
- Können aus der Analyse der Fehler Rückschlüsse auf mögliche Deutungen gezogen werden? Welche Deutungen liegen nahe?

Im Rahmen der Erprobung des computergestützten Diagnoseverfahrens ILEA plus in Kooperation mit dem LISUM Brandenburg haben über 700 Kinder zu Beginn des dritten (Zahlenraum bis 100) und des fünften Schuljahres (Zahlenraum bis 1 Million) Aufgaben zur Zahlauffassung und Zahldarstellung am Zahlenstrahl bearbeitet (Multiple Choice). Darüber hinaus haben 114 Schülerinnen und Schüler des fünften Schuljahres die Aufgaben (Zahlenraum bis 1 Million) im Rahmen eines Paper-Pencil-Tests bearbeitet (offenes Antwortformat).

Ergebnisse

Erste Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Einer der Hauptfehler in beiden Schuljahren ist die Vermischung von ordinaler und kardinaler Deutung des Zahlenstrahls (z. B. wird die 38 im dritten Zehnerabschnitt vermutet und nicht im vierten).
- Der zweite Hauptfehler sind Stellenwertfehler: Die Skalierungsstriche werden als additives Strukturierungsmerkmal richtig gedeutet (es ist der 34. Strich), nicht aber als multiplikatives Strukturierungsmerkmal (Fehldeutungen für die 340.000 sind z. B. 3.400, 34.000, 300.004, 300.040, ...).
- Zahlendreher spielen als Fehlerkategorie aufgrund ihrer Seltenheit kaum eine Rolle. Wenn Zahlendreher auftreten, dann nur bei der Positionierung von Zahlen und dort auch nur, wenn die Zahlen vorgelesen werden (achtunddreißig), nicht wenn sie schriftlich präsentiert werden (38).

Als schwierigste Aufgabe über beide Schuljahre und Zahlenräume hinweg hat sich die Identifizierung des ersten Strichs nach dem Ursprung im Zahlenraum bis 1 Million (10.000) herausgestellt. 22 % der Kinder, die die Aufgabe im offenen Antwortformat bearbeitet haben, machen hier einen Stellenwertfehler (1, 10, 100, 1.000, 100.000). Dieser Befund ist vor allem deshalb so interessant, weil mehr als die Hälfte dieser Kinder *nur* diese Aufgabe zur Zahlauffassung fehlerhaft bearbeiten, obwohl diese Aufgabe die letzte von vier Aufgaben am Zahlenstrahl bis 1 Million ist: Diese Kinder wechseln offensichtlich ihre Deutungsweise während der Arbeit am identischen Material. Zudem bestätigt dieses Ergebnis die Vermutung, dass Schülerinnen und Schüler durch Skalierungsstriche ihr Wissen um Zahlen und Zahlbeziehungen möglicherweise nicht immer angemessen aktivieren können.

Schluss

Es hat sich erneut gezeigt, dass der Zahlenstrahl eine Vielzahl verschiedener Fehldeutungen hervorrufen kann, und dass sein Einsatz im Unterricht deshalb sehr bedacht erfolgen sollte. Hierbei können die identifizierten typischen Fehldeutungen Ausgangspunkt für Reflexionsgespräche sein.

Literatur

- Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser Verlag.
- Ebersbach, M.; Luwel, K.; Verschaffel, L. (2015). The Relationship Between Children's Familiarity with Numbers and Their Performance in Bounded and Unbounded Number Line Estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, 17, 136–154.
- Lorenz, J. H. (2008). *Mathematikus 3 Lehrmaterialien*. Braunschweig: Westermann.
- Peeters, D.; Degrande, T.; Ebersbach, M.; Verschaffel, L.; Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, 31(2), 117-134.
- Selter, Ch. (2017). *Mathe ist Trumpf. Guter Mathematikunterricht – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt PIKAS*. Berlin: Cornelsen.
- Selter, Ch. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.
- Siegler, R. S., & Thompson, C. A. (2014). Numerical landmarks are useful—except when they're not. *Journal of Experimental Child Psychology*, 120, 39-58.
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.