Jan SCHUMACHER, Paderborn

Semiotische Analyse von Sinnkonstruktionsprozessen bei einem innermathematischen Zugang zum Erlernen negativer Zahlen

„Drei minus minus eins sind doch nicht vier.“ Diese Aussage trifft die Schülerin Mia, wenn sie zum ersten Mal eine negative Zahl von einer ganzen Zahl subtrahieren soll. Zu sehr scheint bei ihr die Grundvorstellung des Verringerns/Wegnehmens bei der Subtraktion vorhanden zu sein, als dass sie akzeptieren kann, dass bei dieser Aufgabe die Differenz größer als der Minuend ist. Dieser Beitrag soll einen kleinen Einblick in die Sinnkonstruktionsprozesse zum Erlernen der Subtraktion ganzer Zahlen innerhalb einer innermathematischen Lernumgebung liefern. Als theoretische Grundlage dienen dafür das diagrammatisches Denken von Pierce und darauf aufbauend die Tätigkeiten diagrammatischen Denkens nach Dörfler (2006). Diagrammatisches Denken wird dabei als eine Möglichkeit der Sinnkonstruktion verstanden.

Beschreibung der Lernumgebung

Jahnke (2003) und Steinbring (1994) haben herausgestellt, dass negative Zahlen nur bedingt auf Sachsituationen und reale Umweltbezüge anwendbar und noch viel weniger daraus ableitbar sind. Vielmehr ist es so, dass die negativen Zahlen in die Situationen hineingesehen werden. Auch Freudenthal (1989) betont, dass Zugänge zu negativen Zahlen durch Sachsituationen „mehr Hirnakrobatik [erfordern] als gesundem Menschenverstand zugemutet werden kann“. Aus diesen Gründen ist es ehrlicher, die negativen Zahlen in einem innermathematischen Zugang zu lehren. In der im Rahmen der Studie entwickelten Lernumgebung werden die Operationen mit den ganzen Zahlen immer in einem Dreischritt eingeführt. Es gibt eine Hinführung durch *schöne Päckchen*, bei denen die vorhandenen Muster beschrieben werden sollen und genutzt werden müssen, um die Operationen mit den neuen Zahlen zu lernen. Daran anknüpfend müssen die Aufgaben in eine *Rechentafel* übertragen werden, die dann auf Eigenschaften der Operationen hin untersucht wird. Abschließend soll eine kalkülhafte Rechenregel aus der Rechentafel abgeleitet werden (vgl. Schumacher 2016).

Diagramme und diagrammatisches Denken

Die schon genannten Aufgabenformate *schöne Päckchen* und *Rechentafeln* sind beides Diagramme im Sinne von Peirce. Ein Diagramm ist ein Zeichen,

„das in erster Linie ein Ikon von Relationen ist und darin durch Konventionen unterstützt wird. Es werden ebenfalls Indizes verwendet. Es sollte gemäß einem vollständig konsistenten Darstellungssystem, das auf einer einfachen und leicht verständlichen Grundidee aufbaut, ausgeführt werden.“ (SEM II 98)

Diagramme zeigen die Relationen eines Objektes und sind durch die Regeln und Konventionen eines Darstellungssystems festgelegt. In einem Darstellungssystem wird dabei Zeichenökonomie und eine gute operative Handhabung der Diagramme angestrebt (Hoffmann (2005). Ein Beispiel für ein Diagramm ist die Aufgabe 3 – 5 = -2. Dieses Diagramm ist nach den Regeln des Darstellungssystems der Arithmetik konstruiert und kann nach diesen gelesen werden. Regeln bzw. Konventionen dieses Darstellungssystem sind zum Beispiel, dass keine zwei Operationszeichen hintereinanderstehen dürfen oder dass das Zeichen = die Relation „ist gleich“ bezeichnet. Die dem Diagramm zugrundeliegende Relation ist die Beziehung zwischen den drei Zahlen drei, fünf und minus zwei. In Abbildung 1 ist ein Diagramm zu sehen, das im Kern die gleiche Relation zum Ausdruck bringt, jedoch im Darstellungssystem *Pfeilmodell an der Zahlengerade* konstruiert wurde.

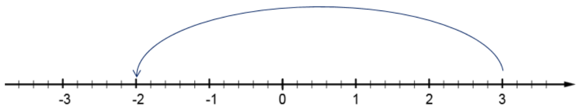

Abbildung 1: Diagramm im Darstellungssystem Zahlengerade

Diagramme können als Forschungsobjekte aufgefasst werden, deren Untersuchung Peirce als diagrammatisches Schließen bzw. diagrammatisches Denken bezeichnet. Diagrammatisches Schließen ist

„Schließen, welches gemäß einer in allgemeinen Begriffen formulierten Vorschrift ein Diagramm konstruiert, Experimente an diesem Diagramm durchführt, deren Resultate notiert, sich Gewissheit verschafft, dass ähnliche Experimente, die an irgendeinem gemäß der selben Vorschrift konstruierten Diagramm durchgeführt werden, die selben Resultate haben würden, und dieses in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringt.“ (NEM IV 47f)

Dörfler (2006) hat aus dieser Definition fünf verschiedene Tätigkeiten diagrammatischen Denkens, die Lernende ausführen, abgeleitet, von denen hier zwei genauer betrachtet werden sollen. Als erstes gibt es die Manipulation von Diagrammen nach Regeln des jeweiligen Darstellungssystems oder Kalküls. Das Ziel dieser Manipulationen ist es, dass die Lernenden mit den verschiedenen Inskriptionen vertraut werden und die Anwendbarkeit von Operationen erkennen. Beispiele hierfür sind z.B. das numerische oder algebraische Rechnen. Die zweite Eigenschaft ist das Experimentieren mit Diagrammen und die Erforschung ihrer Eigenschaften. Beim Experimentieren werden Diagramme transformiert oder kombiniert und die dabei entstehenden Ergebnisse beobachtet. Wie bei der Erforschung der Eigenschaften geht es um das Suchen und Erkennen von Regularitäten und Gesetzmäßigkeiten.

Beide Tätigkeiten sind während der Bearbeitung der Lernumgebung bei den SuS zu erkennen. Dies soll am Beispiel der Einstiegsaufgabe zum Kapitel Wir subtrahieren negative Zahlen verdeutlicht werden.

Semiotische Analyse der Sinnkonstruktionsprozesse

Im Rahmen des Projekts soll folgende übergeordnete Fragestellung beantwortet werden: „Wie erfolgt die Sinnkonstruktion beim Lernen negativer Zahlen innerhalb eines auf dem Permanenzprinzip basierenden, innermathematischen Zugangs?“ Im Rahmen dieses Beitrags sollen erste Ergebnisse zu folgender damit verbundener Frage aufgezeigt werden: „Wie lassen sich die Tätigkeiten diagrammatischen Denkens für den Lerngegenstand *Subtraktion negativer Zahlen* ausdifferenzieren?“ Um den Prozess der Sinnkonstruktion zu analysieren, wurden Schülerpaare während der Bearbeitung der Lernumgebung gefilmt. Das Filmmaterial wurde mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring ausgewertet. Dabei dienen die o.g. Tätigkeiten diagrammatischen Denkens als Kategorien, für die induktiv im Sinne einer Ausdifferenzierung und Konkretisierung der Tätigkeiten Unterkategorien gebildet werden.

Bei der *Erkundung der Eigenschaften* des Diagramms *schönes Päckchen* ist keine Ausdifferenzierung möglich. Die SuS entdecken, wie sich der Minuend, der Subtrahend und die Differenz verändern. Die *Manipulation* des Diagramms *schönes Päckchen* lässt sich aber ausdifferenzieren. Es sind bei den SuS zwei verschiedene Arten zu erkennen, wie sie das Diagramm *schönes Päckchen* manipulieren. Einerseits manipulieren die SuS das schöne Päckchen auf Ebene einer einzelnen Aufgabe. Dies ist besonders bei Aufgaben, die die SuS schon kennen, der Fall. Dabei wird die Struktur innerhalb eines Päckchens nicht weiter betrachtet. Die zweite Art die Päckchen zu manipulieren geschieht auf der Ebene des schönen Päckchens. Hierbei nutzen die SuS die Struktur des Päckchens aus um die Lücken in diesem zu füllen.

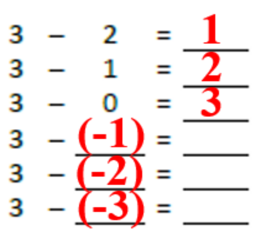

Abbildung 2

Ich möchte nun noch einmal auf die anfangs zitierte Aussage von Mia zurückkommen. Mia hat zusammen mit ihrer Partnerin das in Abbildung 2 dargestellt Päckchen wie folgt bearbeitet: Als erstes wurden mithilfe der Struktur des Päckchens die fehlenden Subtrahenden ergänzt und dann die ersten drei Aufgaben aufgabenweise berechnet. Bei der Berechnung der Aufgabe 3 – (-1) stocken die beiden Schülerinnen. Auf den Vorschlag des Interviewers das Muster des Päckchens zu nutzen, um die weiteren Lösungen zu bestimmen folgt die eingangs zitierte Aussage. Diese Aussage verdeutlicht, dass für Mia – und auch ihre Partnerin – die einzelnen Aufgaben deutlich im Vordergrund stehen. Sie vertrauen nicht dem Muster des Päckchens, um eine Lösung für die neuen – und unbekannten – Aufgaben zu bestimmen, sondern halten an ihren aus den natürlichen Zahlen vorhandenen Vorstellungen fest und versuchen, diese für die ganzen Zahlen zu übernehmen.

Fazit

Es zeigt sich, dass bei dem aufgezeigten Zugang zur Subtraktion negativer Zahlen Sinnkonstruktion nur stattfindet, wenn es beim diagrammatischen Denken ein Zusammenspiel zwischen den beiden dargestellten Ebenen gibt. Die SuS müssen bei einem schönen Päckchen in einem ersten Schritt die bekannten Aufgaben lösen, um die Struktur des Päckchens zu erkennen. Mithilfe dieser Struktur können sie in einem zweiten Schritt dann die neuen Aufgaben lösen. Im abschließenden dritten Schritt müssen sie aber auch wieder einen Blick auf die einzelnen neuen Aufgaben werfen, um die Anwendbarkeit der Operation zu lernen und zu verstehen. Bei Mia und ihrer Partnerin ist zu erkennen, dass sie diese drei Schritte nicht vollziehen, sondern nur auf der Ebene der einzelnen Aufgaben (Schritt 1) bleiben und versuchen, auf diese Art alle – auch die unbekannten – Aufgaben zu lösen. Diese Problematik bei der Sinnkonstruktion, dass die vorhandenen Vorstellungen aus den natürlichen Zahlen angepasst werden müssen, spiegelt sich in der Aussage „Drei minus minus eins sind doch nicht vier“ wieder.

Literaturverzeichnis

Dörfler, Willi (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 27 (2006) 3/4, S. 200–2019.

Freudenthal, Hans (1989): Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. In: *Mathematik lehren (1989) 35, S.* 26–37.

Hoffmann, Michael (2005): Philosophische Abhandlungen Bd. 90. Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. Frankfurt am Main: Klostermann.

Jahnke, Hans Niels (2003): Numeri Absurdi Infra Nihil. Die negativen Zahlen. Sekundarstufe I, 7. Schuljahr. In: *Mathematik lehren (2003) 121, S.* 21–22.

Peirce, Charles S. (SEM): Charles S. Peirce, Semiotische Schriften. Bd I-III (hrsg. und übers. von Christian Kloesel und Helmut Pape). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Peirce, Charles S. (NEM): The new elements of mathematics by Chrles S. Peirce. The Hague: Mouton.

Schumacher, Jan (2016): Erkunden mathematischer Strukturen anstatt Interpretation in Modellen – Ein innermathematischer Zugang zu negativen Zahlen. In: Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg. Beiträge zum Mathematikunterricht 2016.

Steinbring, Heinz (1994): Symbole, Referenzkontexte und die Konstruktion mathematischer Bedeutung — am Beispiel der negativen Zahlen im Unterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 15 (1994) 3-4, S. 277–309.