Heinz SCHUMANN, Weingarten

Raumgeometrische Entdecken: Billardbahnen in einfachen Polyedern

1. Einleitung

Die Nutzung Dynamischer Raumgeometrie-Systeme (DRGS) erschließt Lehrern und Schülern im Kontext des entdeckenden Lernens neue raumgeometrische Themen (“Enrichment”). Dabei unterstützt die Potentialität von DRGS im Rahmen experimentellen Arbeitens die Anwendung heuristischer Methoden (“Reinforcement”). Ein solches Thema ist das Billard in konvexen Polyedern. Das Entdecken besonderer Billardbahnen (Billard-Trajektorien) im Würfel und in seinen Verallgemeinerungen, das gleichbedeutend ist mit dem Entdecken einbeschriebener räumlicher Vielecke minimalen Umfangs, eignet sich für raumgeometrische Aktivitäten außerhalb des Regelunterrichts. Umgekehrt können räumliche Vielecke der Kennzeichnung besonderer konvexer Polyeder dienen. – Über Billardbahnen in Polyedern ist bis heute wenig bekannt (u. a. Berger 2010).

2. Vom Quadratbillard zum Würfelbillard (Analogiebildung)

Am einfachsten wird ein Billard-Viereck im Quadrat mit dem Startpunkt R_1 konstruiert, indem man eine Parallele zu einer der Quadratdiagonalen durch R_1 legt (Abb. 1). Diese schneidet eine benachbarte Quadratseite in R_2. Durch diesen Punkt zieht man die Parallele zur zweiten Quadratdiagonalen und bekommt R_3 als Schnittpunkt mit einer weiteren Quadratseite. Die Spiegelung des Streckenzugs $R_1R_2R_3$ am Quadratmittelpunkt M ergänzt den Streckenzug zum Billard-Rechteck $R_1R_2R_3R_4$. Es liegt nahe, Billardbahnen im Würfel auf analoge Weise wie das Billard-Rechteck zu konstruieren. Dazu gehen wir beispielsweise von einem Punkt R_1 auf einer Seitenfläche des Würfels aus (Abb. 2.1) und legen durch diesen eine Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt A. Die Parallele schneidet eine der Seitenflächen im Punkt R_2. Durch diesen Punkt ziehen wir die Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt B, die eine weitere Seitenfläche im Punkt R_3 schneidet. Die Parallele zur Raumdiagonalen mit dem Endpunkt C durch R_3 schneidet eine weitere Seitenfläche in R_4. Spiegelung des Streckenzugs $R_1R_2R_3R_4$ am Würfelmittelpunkt M ergibt ein räumliches Billard-Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$. Entsprechende erhalten wir für den Startpunkt R_1 ein weiteres, aber verschiedenes Billard-Sechseck (Abb. 2.2). Überprüfung aller möglichen Konstruktionsfälle zeigt, dass es, abgesehen von besonderen Lagen des Startpunktes R_1, immer nur zwei verschiedene solcher Sechsecke für denselben Startpunkt gibt.

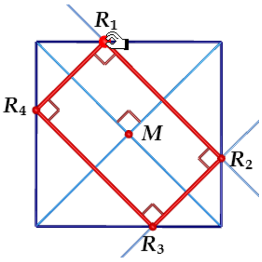

Abb. 1

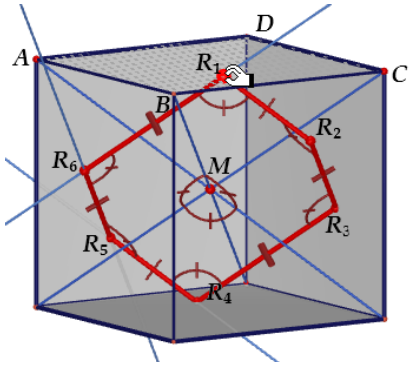

Abb. 2.1

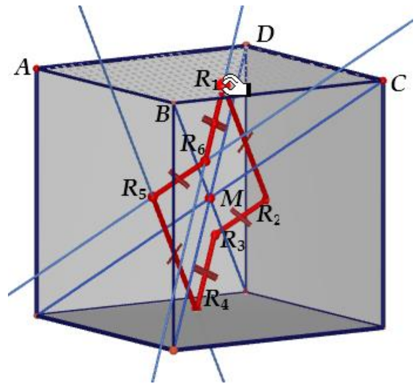

Abb. 2.2

Eigenschaften der Billard-Sechsecke: Die Umfänge der zum Würfelmittelpunkt symmetrischen Sechsecke sind gleich dem Doppelten der Raumdiagonalenlänge. Die Billard-Sechsecke sind also alle umfangsgleich. Das Sechseck hat einander gleiche Innenwinkel, welche mit dem stumpfen Winkel zwischen den Diagonalen übereinstimmen. Das Billard-Sechseck ist somit ein gleichwinkliges Sechseck, dessen Innenwinkelgröße konstant bei Formänderung bleibt. – Zur Determination: Die Unterscheidung zwischen beiden Sechsecken hat nur Bedeutung, wenn von demselben Startpunkt eine Billardbahn konstruiert werden soll. Mittels einer 90°-Drehung um die Lotachse durch den Mittelpunkt des Quadrats *ABCD* kann man zeigen, dass jedes Billard- Sechseck vom Typ 1 in ein Sechseck vom Typ 2 abgebildet werden kann und umgekehrt. – Billard-Sechsecke mit Startpunkten auf den restlichen fünf Seitenflächen lassen sich durch Spiegelungen bzw. Drehungen auf ein Sechseck mit einem Startpunkt im Inneren des Dreiecks *ABC* und den erzeugenden Raumdiagonalen durch die Eckpunkte *A*, *B*, *C* abbilden.

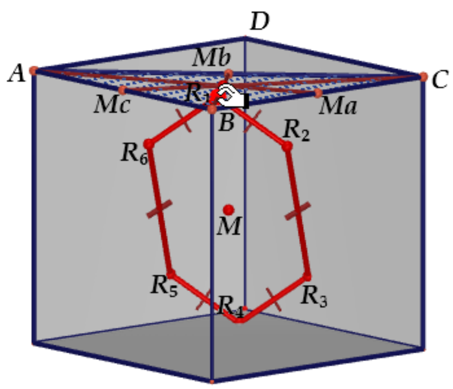

Abb. 3.1

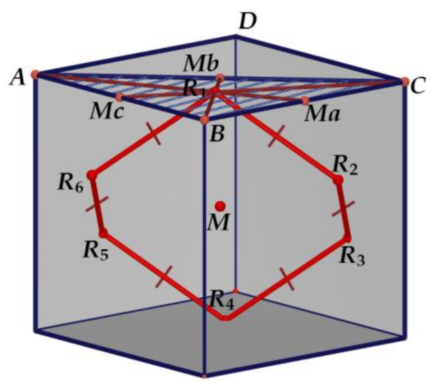

Abb. 3.2

Besondere Formen des Billard-Sechsecks bekommen wir, wenn R_1 im Inneren einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks *ABC* liegt (Abb. 3.1, R_1 liegt im Inneren von BM_b). Das Sechseck hat dann zwei diametral liegende Paare von Nachbarseiten, die alle von gleicher Länge sind. Wenn R_1 mit dem Schwerpunkt des Dreiecks *ABC* zusammenfällt, dann ist das räumliche Billard-Sechseck sogar gleichseitig, also insgesamt regelmäßig punktsymmetrisch (Abb. 3.2); u. v. a. m. in Schumann (2016).

Anmerkung: Bei Gardner (1971) findet sich kein Hinweis auf die vorstehenden Eigenschaften eines Billard-Sechsecks bei besonderer Lage des Startpunktes R_1. Vermutlich hat Gardner das ohne geeignete Werkzeuge nicht entdecken können.

3. Ein Verallgemeinerung: Billard im gleichseitigen Parallelepiped

Entsprechende Verallgemeinerungen des Würfels sind der Quader (rechtkantiges Parallelepiped) und das gleichkantige Parallelepiped, dessen Seitenflächen Rauten sind und das im Sonderfall einander kongruente Rauten als Seitenflächen hat, also ein gleichseitiges Parallelepiped ist. Wir beschränken uns hier auf Untersuchungen des Billards im gleichseitigen Parallelepiped, da dessen Form nur von einem Parameter, nämlich dem Rautenwinkel bestimmt ist. – Es stellt sich heraus, dass das gleichseitige Parallelepiped als optimale Billardbahn ein regelmäßiges Sechseck besitzt.

4. Vom räumlichen regelmäßigen Sechseck zum gleichseitigen Parallelepiped mit diesem Sechseck als umlaufender Billardbahn

Haben wir bisher zum Würfel und einer besonderen Verallgemeinerung des Würfels das zugehörige Billard-Sechseck konstruiert, so gehen wir im Folgenden gemäß der heuristischen Methode der Reversibilität umgekehrt vor, indem wir zu einem regelmäßigen punktsymmetrischen 3D-Sechseck dasjenige Hexaeder konstruieren, welches dieses Sechseck als eine Billardbahn besitzt. – Konstruiert man zu dem regelmäßigen 6-eckigen „Mantelpolygon“ eines 3-eckigen Antiprismas gleichseitiger Grundfläche und Deckfläche die Winkelhalbierenden und zu diesen in ihren Scheiteln, also den Eckpunkte des Sechsecks, jeweils die Lotebenen, so bildet die konvexe Hülle dieser Ebenen ein Hexaeder, welches ein gleichseitiges Parallelepiped ist (Abb. 4). Wir gewinnen so mit dem Ergebnis von Abschnitt 3 folgende Aussage: Ein Hexaeder ist ein gleichseitiges Parallelepiped genau

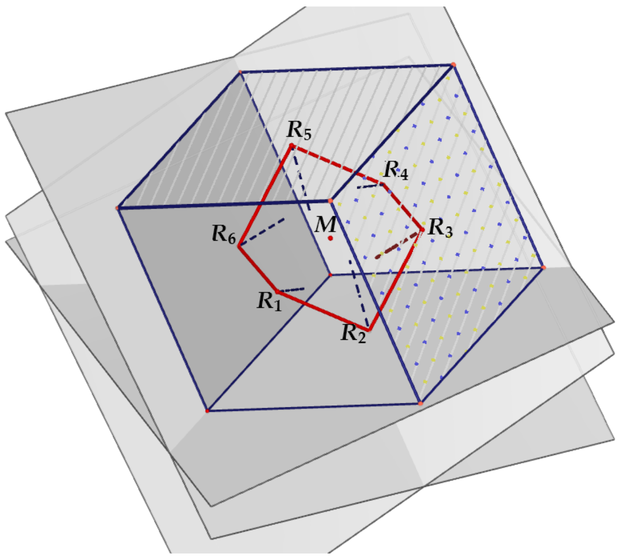

Abb. 4

dann, wenn es ein regelmäßiges punktsymmetrisches Billard-Sechseck besitzt. Dieser Zusammenhang zwischen besonderen 3D-Polygonen und konvexen Polyedern stellt eine Art von „Orthogonal-Dualität“ dar.

Einschub: Aus dem bisher noch nicht berücksichtigten überschlagenen regelmäßigen Sechsecken ergibt sich als konvexe Hülle der Lotebenen zu den Winkelhalbierenden in seinen Eckpunkten eine dreiseitige Doppelpyramide aus einander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken; für regelmäßige überschlagene 2n-Ecke, $n > 3$, erhält man Trapezoeder.

Wir schließen unsere Untersuchung hier aus Platzgründen ab mit einer Kennzeichnung des Parallelepipeds: Ein Hexaeder ist ein Parallelepiped genau dann, wenn es ein Billard-Sechseck besitzt, das punktsymmetrisch ist.

5. Ausblick

Die vorstehenden Untersuchungen kann man auf einfach umlaufende Billardbahnen in anderen konvexen Polyedern übertragen, so auf die Johnsonschen Polyeder (konvexe Polyeder, deren Seitenflächen regelmäßige Polygone sind). – Das Ergebnis der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen besonderen Tetraedern und symmetrischen 3D-Vierecken als Billard-Vierecke findet man in Schumann (2017). – Je mehr Seitenflächen solche Polyeder besitzen, desto schwieriger gestaltet sich die interaktive Konstruktion entsprechender Billard-Vielecke. Nicht immer verläuft eine Untersuchung erfolgreich. Geht man von besonderen 3D-Polygonen aus, so lassen sich auch andere konvexe Polyeder als konvexe Hüllen der Lotebenen zu den Winkelhalbierenden in den Polygonecken („WHL-Polyeder“) gewinnen, die polygonal gekennzeichnet werden können. – Es ergeben sich offene Fragen, etwa die nach der Existenz von Polyedern bei vorgegebenen Billard-Vielecken. – Bei der Bereitstellung von 3D-Polygonen als Billard-Polygone ist das Fehlen einer Theorie für solche Polygone festzustellen.

Literatur

Berger, M. (2010). Geometry Revealed. A Jacob’s Ladder to Modern Higher Geometry. Heidelberg: Springer.

Gardner, M. (1971). Martin Gardener’s Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American. San Francisco: W. H. Freeman, p. 29-38.

Laborde, J.-M. et al. (2004-2017): Cabri 3D 2.1 und Cabri Express (deutsche Software-Schnittstellen von H. Schumann). Grenoble: Cabrilog, www.cabri.com.

Schumann, H. (2016). Raumgeometrische Entdeckungen durch Analogisieren am Beispiel „Würfel-Billard“. In: Informationsblätter der Geometrie, 2016, Heft 2, S. 20-29.

Schumann, H. (2017). Das räumliche Viereck – eine Einführung. In: MNU Journal, Jg. 70, Heft 6, S. 382-389.