Klaudia SINGER, Graz & Silvia SCHÖNEBURG-LEHNERT, Leipzig

Projekt AEZ – Altersstufenübergreifend: Elementares Verständnis im Umgang mit Zahlen in verschiedenen Repräsentationsformen – Teilprojekt: Größenvergleich von Zahlen in Bruchdarstellung

Zahlen und der Umgang mit ihnen in verschiedenen Repräsentationsformen (symbolisch, verbal und grafisch) stellen eine besondere Leistung menschlichen Denkens dar (vgl. Hefendehl-Hebeker & Schwank 2015). Es gibt in diesem Zusammenhang Themen, die sich von Kindesbeinen an durch Schulzeit, Ausbildung und Berufsleben ziehen und lebenslang relevant bleiben. Als solche sind etwa Größenvergleiche anzusehen. Bereits für Kleinkinder sind Fragen wie „Wer ist größer?“ von Interesse, und es gibt wohl kaum Berichte oder Präsentationen, die ohne Vergleiche inklusive diverser größenvergleichender Grafiken auskommen, um exemplarisch nur einige wenige Bereiche zu nennen. Eine Vielzahl von fachdidaktischen Untersuchungen setzt sich mit typischen Fehlkonzepten beim Zahlenvergleich auseinander (vgl. Padberg & Wartha 2017, Vamvakoussi, & Vosniadou 2010, Prediger 2011, Prediger 2007, Schink 2013, Wittmann 2012, Wartha & Güse 2009, Wartha 2007, Clarke & Roche 2009, …). Um nachhaltiges Wissen und Können der Lernenden zu gewährleisten, wird die große Bedeutung einer immer wiederkehrenden Bearbeitung im Unterricht aus verschiedenen Perspektiven (Sellars 2018) in Verbindung mit einem passenden Monitoring durch die Lehrenden (Gardner 2012) durch Studien eindrücklich bestätigt. Dass es hier in Bezug auf eine altersstufenübergreifende Betrachtung der Kompetenzentwicklung deutlich mehr Forschung bedarf und Zahlenvergleiche und verschiedene Darstellungsformen auch für Studierende nicht trivial sind, sei durch folgende zwei aktuelle Beispiele kurz dargelegt:

Ein seit 2013 jährlich in Österreich und seit 2016 auch in Leipzig durchgeführter Lernstandstest bei Studienanfängern Lehramt Mathematik mit inzwischen mehreren tausend Teilnehmern zeigt, dass in beiden Ländern zum Teil weit über die Hälfte der Studierenden nicht fehlerfrei dazu in der Lage ist, ohne Taschenrechner 0,001 und 5^{-2} in Prozent-, Bruch-, Dezimal- und Potenzschreibweise anzugeben (Andre et al. 2016) – Lösungsquote 2017: 45 %.

Für den in diesem Beitrag verwendeten Bruchzahlenvergleich wurde als Basis eine Aufgabe aus einem Eingangstest (15 min) zur LV Mathematische Methoden in den Sportwissenschaften aus Graz verwendet: Bei der Aufgabenstellung *18/19 > 17/18**?** • richtig • falsch • Ich verstehe die Frage nicht. • Ich habe keine Ahnung* liegt die Lösungshäufigkeit bei den Studierenden seit vielen Jahren unter 45%.

Wie gehen nun SchülerInnen der Sekundarstufe bzw. Lehramtsstudierende Mathematik mit diesem Größenvergleich 18/19 und 17/18 um, und welche Lösungsstrategien und Fehlkonzepte lassen sich identifizieren? Im Folgenden ein paar Blitzlichter aus der im Herbst 17 durchgeführten Studie:

Allgemeine Ergebnisse

Die Aufgabe wurde in vier, sich leicht unterscheidende, Arbeitsblätter eingebettet und in Deutschland an 14 Gymnasien, 5 Oberschulen sowie 5 Universitäten und in Österreich an 5 neuen Mittelschulen, 7 allgemeinbildenden höheren, 2 berufsbildenden höheren Schulen sowie einer Alternativschule in allen Schulstufen getestet. Alle vier Arbeitsblätter wurden dabei zu ca. gleichen Teilen in allen Klassen und bei den Studierenden eingesetzt.

AB	*Art der Aufgabenstellung*
A	Vergleiche die Brüche. Nutze dazu >, < oder =. $\frac{17}{18}$ $\frac{18}{19}$ Beschreibe ausführlich dein Vorgehen.
B	Einbettung von A in einen Annabrief
C	Erst $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ mit Text aus A dann wie A
D	Wie A + Manche Leute berichten, dass sie sich bei der Lösung der Aufgabe die Situation bildlich vorgestellt haben. Wenn das bei dir auch der Fall ist, versuche deine bildliche Vorstellung zu zeichnen.

Im Weiteren werden nun als Auszug einige Teilergebnisse aus acht Gymnasien (jeweils vier aus Deutschland und Österreich mit insgesamt 4602 SchülerInnen) und fünf Universitäten (ca. 400 Lehramtsstudierende Mathematik in Deutschland) zum Vergleich von 18/19 und 17/18 vorgestellt. Abb. 1 zeigt die Lösungshäufigkeiten in Abhängigkeit von Schulstufe bzw. letzter Zeugnisnote. Der Prozentsatz der richtigen Lösung steigt ab der Schulstufe 9 deutlich an. Was den Zusammenhang mit der Leistungsbeurteilung betrifft, so zeigen nähere Analysen, dass vor allem ein starker von Geschlecht und Schulstufe unabhängiger Zusammenhang zwischen einer hohen Lösungshäufigkeit und der Note *Sehr gut* gegeben ist. Die Geschlechterunterschiede in der Lösungshäufigkeit sind hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass die Mädchen signifikant öfter das falsche Gleichheitszeichen setzten als die Jungen (siehe Abb. 2). Die Studierenden (N = 403) lösten die Aufgabenstellung zu 86,6% richtig (5,4% falsch, 8% fehlend). Offensichtliche Schwierigkeiten beim Operieren in verschiedenen Zahlenmengen und im Erkennen von Strukturen traten auch hier zutage. Die höhere Verwendung des falschen Gleichheitszeichens bei den Frauen (w: 4% gegen m: 0,5%) und die großen

Schwierigkeiten der Studierenden beim Transfer der Aufgabe in die visuelle Repräsentationsebene fielen ebenso ins Auge.

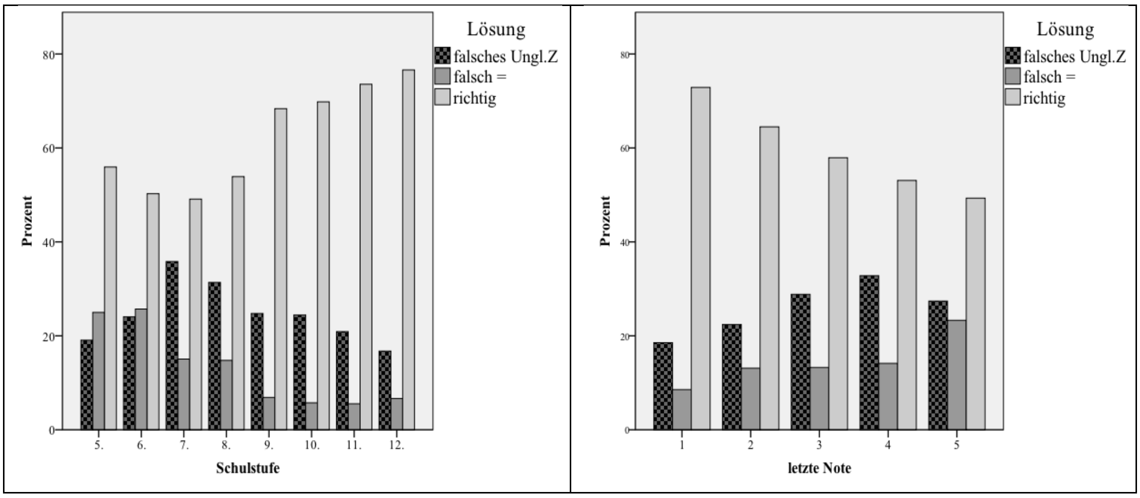

Abb. 1: Lösungshäufigkeiten in Abhängigkeit von Schulstufe und letzter Zeugnisnote beim Vergleich von 18/19 und 17/18 in Prozent, N = 4211 (4602 und 391 fehlend).

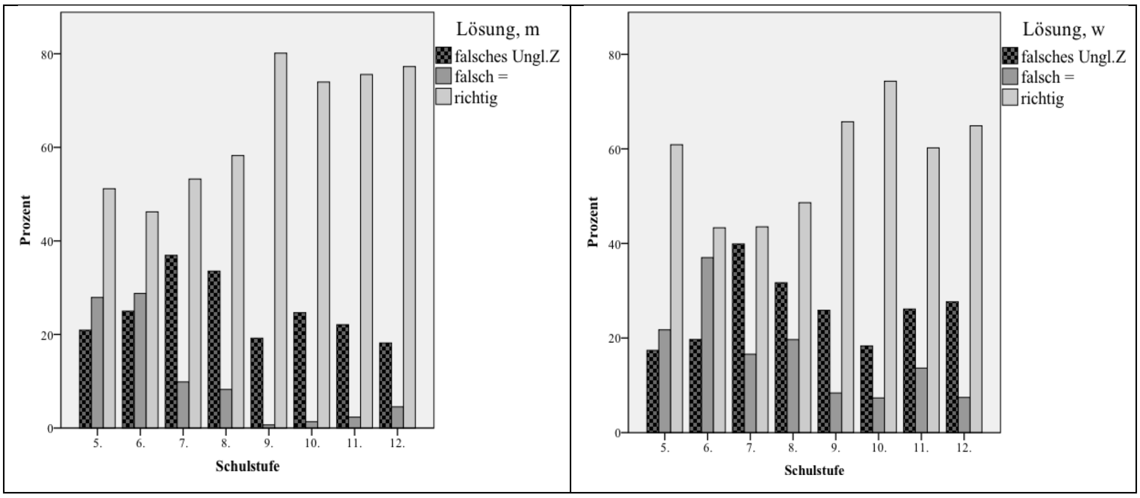

Abb. 2: Lösungshäufigkeiten getrennt nach Geschlecht, rechts weiblich, N = 4211 (2067 w, 2433 m, 102 keine Angabe).

Lösungskonzepte, Visualisierungen und Kontext

Bei 1640 SchülerInnen wurden die Hauptlösungsstrategien kategorisiert. Die zugrundeliegenden angewandten Konzepte sind nach Erfolg (absteigend) aufgelistet – die Zahl in der Klammer gibt den Prozentsatz der Probanden an, die es als Hauptkonzept nutzten: 1. 1/2 < 2/3, … – „aufsteigend“ (1%), 2. Ergänzung auf ein Ganzes (16%), 3. gleichnamig machen (15%), 4. Umwandlung in Dezimalbruch oder Prozente (15%), 5. (mehrere) Größenvergleiche oder als Ungleichung (8%), 6. „Bild im Kopf“ (3%), 7. unkommentierte oder kommentierte Grafik (8%), 8. Nenner – Funktion „Teilen“ (12%), 9. geraten – sieht man (6%), 10. nur <, > oder = eingefügt – inhaltlich unkommentiert (15%). Die Häufigkeit der Verwendung einer *Ergänzung auf* *ein Ganzes, Umwandlung in einen DB* und *gleichnamig machen* nimmt in der Oberstufe zu. Auffällig ist, dass die männlichen und weiblichen Teilnehmer die Konzepte nicht nur unterschiedlich häufig verwenden, sondern dass sich diese bei den Geschlechtern als unterschiedlich erfolgreich herausstellen. So stellt etwa die Ergänzung auf ein Ganzes bei den jungen Männern das am häufigsten verwendete und insgesamt erfolgreichste Instrument dar, während es von den jungen Frauen nur am dritthäufigsten eingesetzt wird und am häufigsten zum falschen Gleichheitszeichen führt. Ca. 14% der Schülerinnen und Schüler sowie ca. 9% der Studierenden versuchen sich in Visualisierungen. Diese sind zum Großteil nicht korrekt und benachteiligen das Ereignis einer richtigen Lösung. Von Seiten der Arbeitsblätter begünstigt Arbeitsblatt B, das auch den Zahlenvergleich von 3/4 und 4/5 beinhaltet, das richtige Ergebnis des Vergleichs von 17/18 und 18/19.

Literatur

Andre, M., Aspetsberger, K., Burtscher, M., Gruber, C., Juen-Kretschmer, C., Ranz, J., Singer, K. & Thaller, B. (2016): Projekt LEMMA. Wien: Praesens.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009): Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. Educ Stud Math 72: 127-138. Springer Science + Business Medien B.V.

Gardner, J. N. (Hrsg.) (2012): Assessment and learning. Los Angeles et. al.: Sage.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015): Arithmetik: Leitidee Zahl. In: Bruder et al. (2015). 77-116. Heidelberg: Springer.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Berlin: Springer.

Prediger, S. (2007): Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. In: Beiträge zum MU 2007, 203-206.

Prediger, S. (2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Der Mathematikunterricht 57(3). 5-14.

Sellars, M. (Hrsg.) (2018): Numeracy in Authentic Contexts. Making Meaning Across the Curriculum. Singapore: Springer.

Schink, A. (2013): Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen. Diagnose und Förderung für Lernende mit Schwierigkeiten. In: Beiträge zum MU 2013, 878-881.

Schink, A. (2013): Flexibler Umgang mit Brüchen. Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. Wiesbaden: Springer.

Wartha, S. & Güse, M. (2009): Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. Journal für Mathematik-Didaktik, 30 (3-4), S. 256-280.

Wittmann, G. (2012): Die Zahlen sind entscheidend. In: Sprenger et al. (Hrsg.). Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Heidelberg: Springer Fachmedien.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010): How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. In: Cognition and Instruction 28(2). 181-209.