Daniel SOMMERHOFF & Stefan UFER, München

Was macht mathematische Beweise aus? Akzeptanzkriterien von Beweisen in der universitären Lehre

Mathematisches Argumentieren und Beweisen stellen zentrale mathematische Aktivitäten dar (Heintz, 2000). Entsprechend werden sie oft als wichtige Lernziele der mathematischen Ausbildung gesehen und sind beispielsweise in den Bildungsstandards verankert (KMK, 2012). Im Laufe der mathematischen Ausbildung werden dabei zunächst weitgehend informelle Arten des Argumentierens thematisiert, zunehmend formalisiert und an die Standards der mathematischen Community angenähert, um so zum Konzept des mathematischen Beweises zu gelangen (Jahnke & Ufer, 2015). Empirische Studien belegen jedoch, dass SchülerInnen wie Studierenden der Umgang mit mathematischen Beweisen schwerfällt und diese sowohl beim Konstruieren von Beweisen (z.B. Weber, 2003) als auch beim Validieren von Beweisen (z.B. Selden & Selden, 2003) Probleme haben. Eine Grundlage für den erfolgreichen Umgang mit mathematischen Beweisen ist Wissen darüber was einen mathematischen Beweis ausmacht und über Unterschiede zwischen Alltagsargumentationen und Beweisen. Entsprechend ist Wissen über Akzeptanzkriterien von mathematischen Beweisen notwendig und deren Vermittlung essentieller Bestandteil der Enkulturation in die mathematische Community im Rahmen der mathematischen Ausbildung.

Die vorliegende Studie untersucht, welche Akzeptanzkriterien von SchülerInnen, Studierenden, sowie MathematikerInnen im Kontext der universitären Lehre verwendet werden. Außerdem wird untersucht, ob verschiedene Arten von Akzeptanzkriterien verwendet werden und sich systematische Unterschiede zwischen den Gruppen zeigen, die als Zeichen einer Enkulturation im Laufe der mathematischen Ausbildung interpretiert werden können.

Hintergrund

Unter einem mathematischen Beweis versteht man eine mathematische Argumentation, welche den Normen der mathematischen Community entspricht (vgl. Reiss & Ufer, 2009). Obwohl beispielsweise Dawkins und Weber (2017) erst kürzlich eine Liste entsprechender Normen und Werte veröffentlicht haben, gibt es innerhalb der mathematischen Praxis jedoch keine abschließende Liste entsprechender Normen. Hanna und Jahnke (1996) stellen entsprechend fest, dass es (innerhalb der mathematischen Praxis) keine allgemeinen Kriterien für die Akzeptanz von Beweisen gibt. Im Gegensatz dazu gibt es jedoch lokal, d.h. auf einzelne (niedergeschriebene) Beweise angewendete Kriterien, die in der täglichen mathematischen Praxis

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

verwendet werden, um deren Korrektheit zu bestimmen. Diese sollen im Folgenden als *Akzeptanzkriterien* bezeichnet werden und umfassen alle Kriterien, welche zur Annahme (bspw. „Verständlichkeit") oder zur Ablehnung (bspw. „Existenz eines Gegenbeispiels") der Korrektheit von mathematischen Beweisen verwendet werden.

Da die Festlegung von Akzeptanzkriterien für mathematische Beweise ein sozialer Prozess ist (vgl. Hanna, 1989), ist davon auszugehen, dass sich diese innerhalb von verschiedenen mathematischen Communities unterscheiden. Entsprechend kann die mathematische Ausbildung als (mehrfacher) Enkulturationsprozess verstanden werden, welcher als wesentliche Abschnitte den Sekundarschulbereich, die Universität, sowie ggfs. später den Forschungskontext und die jeweiligen Akzeptanzkriterien einschließt. Diesem Prozess können wiederum verschiedene theoretische Enkulturationsmodelle zu Grunde gelegt werden (vgl. auch Müller-Hill & Kempen, in Vorbereitung).

Obwohl anzunehmen ist, dass Akzeptanzkriterien für Beweise eine entscheidende Rolle beim Umgang mit mathematischen Beweisen spielen, gibt es bisher wenig Forschung dazu, welche Akzeptanzkriterien tatsächlich verwendet werden. Insbesondere fokussiert bisherige Forschung (z.B. Hanna, 1989; Heinze, 2010) im Wesentlichen auf MathematikerInnen im Kontext der mathematischen Forschungspraxis. Empirische Ergebnisse zu Akzeptanzkriterien von SchülerInnen, Studierenden sowie von MathematikerInnen im Kontext der universitären Lehre liegen bisher nicht vor.

Fragestellungen und Ziele

Um die bestehende Forschungslücke in Bezug auf Akzeptanzkriterien von mathematischen Beweisen im Laufe der mathematischen Ausbildung zu schließen und den Kontext der mathematischen Lehre genauer zu beleuchten, verfolgt die vorliegende Studie drei wesentliche Fragestellungen: Welche Akzeptanzkriterien verwenden StudienanfängerInnen, Studierende und Mathematiker (im Kontext der Lehre) beim Validieren von Beweisen? Ist beim Vergleich der Gruppen eine Annäherung an die von MathematikerInnen im Kontext der Lehre verwendeten Akzeptanzkriterien sichtbar? Welche Kriterien geben MathematikerInnen auf direkte Nachfrage für die Akzeptanz bzw. Ablehnung von Beweisen im Kontext Lehre an?

Methode

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden drei querschnittliche Erhebungen mit n_1 = 114 StudienanfängerInnen (im Rahmen eines Brückenkurses vor Beginn des 1. Semesters), n_2 = 66 Studierenden der Mathematik (zu Beginn eines Zusatzkurses zum mathematischen Beweisen nach Ende des 1.

Semesters) und n_3 = 273 MathematikerInnen (als online-Befragung; 170 DoktorandInnen, 53 Post-Docs, 16 Dozierende, 31 ProfessorInnen, 3 NA) durchgeführt. Zur Erhebung der Akzeptanzkriterien wurden den Gruppen vier verschiedene Beweise einer Aussage aus dem Bereich der elementaren Zahlentheorie vorgelegt, wobei einer der Beweise korrekt war und die anderen je einen Zirkelschluss, einen induktiven Schluss, bzw. eine inkorrekte Begründung enthielten. Die TeilnehmerInnen mussten jeweils die Korrektheit des Beweises (geschlossenes Item; ja/nein/ich weiß nicht) bewerten und anschließend Ihre Wahl in einem offenen Item begründen.

Zusätzlich erhielten die MathematikerInnen zwei offene Fragen, in denen Sie gebeten wurden ihren KorrektorInnen aus dem ersten Semester Kriterien zu nennen, mit denen sie feststellen können, dass ein Beweis „sicher korrekt“ bzw. „sicher inkorrekt“ ist.

Die Begründungen der TeilnehmerInnen wurden anschließend segmentiert und basierend auf einem weitgehend theoriegeleiteten und induktiv ergänzten Kodierschema hinsichtlich der verwendeten Akzeptanzkriterien kodiert. Die Interraterreliabilitäten bei der Identifikation der Akzeptanzkriterien waren insgesamt sehr gut.

Ergebnisse

Erste deskriptive Ergebnisse zeigen, dass MathematikerInnen in ihren Begründungen im Schnitt eine höhere Anzahl an Akzeptanzkriterien verwenden als Studierende und StudienanfängerInnen. Auch geben die Studierenden im Vergleich zu beiden anderen Gruppen am häufigsten keinerlei Begründung für ihre Einschätzung der Korrektheit an.

In ihren Begründungen waren die MathematikerInnen mehrheitlich in der Lage den in den fehlerhaften Beweisen vorkommenden Fehler zu identifizieren und mit entsprechenden Akzeptanzkriterien zu adressieren, wohingegen dies den StudienanfängerInnen sowie insbesondere den Studierenden deutlich schwerer fiel.

Die Analyse der Begründungen zeigt, dass sowohl StudienanfängerInnen als auch Studierende und MathematikerInnen ein breites Spektrum an Akzeptanzkriterien verwenden und die in der Literatur nahegelegten Kriterien auch weitgehend verwendet werden. Die Häufigkeit der verwendeten Akzeptanzkriterien unterscheidet sich jedoch teils deutlich zwischen den drei Gruppen.

In den zwei Zusatzfragen für die MathematikerInnen nennen diese im Wesentlichen die gleichen Akzeptanzkriterien wie bei den Items, die an die spezifischen Beweise gebunden sind, was die Validität der beweisgebundenen Aufgabenformate unterstreicht.

Diskussion

Die Ergebnisse der Studien zeigen, dass nicht nur MathematikerInnen, sondern auch StudienanfängerInnen und Studierende die bisher weitgehend nur theoretisch vermuteten Akzeptanzkriterien verwenden und deklaratives Wissen zu den Kriterien besitzen. Gerade die hohe Anzahl an Begründungen bei StudienanfängerInnen und Studierenden, die nicht zu den Fehlern in den Beweisen passen, zeigt jedoch, dass die Anwendung bzw. Implementation der Akzeptanzkriterien Probleme bereitet. Entsprechend könnten Interventionen, die auf den Aufbau von prozeduralem Wissen zur Implementation der Akzeptanzkriterien fokussieren, sinnvoll zur Verbesserung der Leistung der Studierenden beim Validieren und (indirekt) auch beim Konstruieren von Beweisen sein. Entsprechende Ergebnisse stehen bislang jedoch aus.

Literatur

Dawkins, P. C. & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123-142.

Hanna, G. (1989). More than Formal Proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-23.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International handbook of mathematics education* (S. 877-908). Dordrecht, Netherlands: Springer Science+Business Media

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Wien, Austria: Springer.

Heinze, A. (2010). Mathematicians' Individual Criteria for Accepting Theorems and Proofs: An Empirical Approach. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (S. 101-111). Boston, MA: Springer US.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Berlin, Germany: Springer.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Bonn, Germany: (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).

Müller-Hill, E. & Kempen, L. (in preparation). Some suggestions on the enculturation function of mathematical proof.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), 111*(4), 155-177.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In A. Selden & J. Selden (Hrsg.), *The Mathematical Association of America Online: Research Sampler* (Bd. 8).